$\boxed{\text{A}}$

ΣΕΜΦΕ 2ο Εξάμηνο κανονική εξέταση - Ιούλιος 2011 (18–7–11)
Γραμμική Άλγεβρα και Εφαρμογές

Ονοματεπώνυμο ....

Θ Ε Μ Α Τ Α

Θ1. α) Έστω λ_1, λ_2 διακεκριμένες ιδιοτιμές ενός ενδομορφισμού $f : V \longrightarrow V$ και έστω $\vec{x_1}, \vec{x_2}$ αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα. Δείξτε ότι τα $\vec{x_1}, \vec{x_2}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.
β) Δίνεται ο πίνακας:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{bmatrix}.$$

i) Δείξτε ότι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A είναι $(x-4)(x+2)^2$.
ii) Βρείτε αντιστρέψιμο πίνακα P τέτοιο ώστε $P^{-1}AP = D$, όπου D διαγώνιος.
iii) Βρείτε μια διαγωνοποίηση του πίνακα A^{100}.

Θ2. α) Έστω πολυώνυμο $f(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + \ldots + a_k\lambda^k$ που μηδενίζεται από έναν $n \times n$ πίνακα A. Δείξτε ότι αν ο πίνακας B είναι όμοιος με τον A τότε είναι $f(B) = 0$.
β) Διατυπώσατε το Θεώρημα Caley-Hamilton.
γ) Δείξτε ότι όμοιοι πίνακες έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο.
δ) Δείξτε ότι κάθε γραμμικός παράγοντας του χαρακτηριστικού πολυωνύμου $\chi_A(\lambda)$ ενός $n \times n$ πίνακα A είναι και παράγοντας του ελαχίστου πολυωνύμου $m_A(\lambda)$.
ε) Δίνεται ο πίνακας:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}.$$

i) Βρείτε το ελάχιστο πολυώνυμο του A.
ii) Βρείτε τον πίνακα A^{-1} και δώστε τις ιδιοτιμές του.
iii) Βρείτε τον πίνακα A^{100}.

Θ 3. **Α** Έστω V ένας διανυσματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο $\langle\, , \rangle$ και $T : V \to V$ ένας γραμμικός μετασχηματισμός.
α) Να ορίσετε τις παρακάτω έννοιες
i) συζυγής γραμμικός μετασχηματισμός του T, **ii)** T αυτοσυζυγής, **ii)** T ισομετρικός.
β) Να δείξετε ότι ο T είναι ισομετρικός αν και μόνο αν απεικονίζει μια ορθοκανονική βάση του V σε μια ορθοκανονική βάση του V.

Β) Δίνεται ο γραμμικός μαετασχηματισμός $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ και η βάση $(\varepsilon) = \{\varepsilon_1 = (1,1,1),\ \varepsilon_2 = (0,1,1),\ \varepsilon_3 = (0,0,1)\}$ του $\mathbb{R}^3$. Αν $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 2 \\ -3 & -2 & -3 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ είναι ο πίνακας του T ως προς τη βάση (ε), να βρεθεί ο T^* και να δειχθεί ότι ισχύει $T = T^*$.

Θ 4. **Α** Έστω M ο υπόχωρος του $\mathbb{R}^4$ που παράγεται από τα διανύσματα $v_1 = (3,0,6,0)$, $v_2 = (0,-1,2,1)$. Δίνεται επίσης το διάνυσμα $v_0 = (5,2,1,0)$. Να βρεθούν:
i) μια ορθοκανονική βάση του ορθογωνίου συμπληρώματος $M^\perp$ του M.
ii) Οι ορθές προβολές του διανύσματος v_0 στους υποχώρους M, $M^\perp$.
Β) Δίνεται η εξίσωση $3x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 2xz - 4 = 0$. Να προσδιοριστεί ένα νέο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων ως προς το οποίο η εξίσωση να έχει την κανονική της μορφή και να αναγνωριστεί το είδος της επιφάνειας που παριστάνει.

Τα θέματα είναι ισοδύναμα   Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ