



ΣΕΜΦΕ Γραμμική Άλγεβρα και Εφαρμογές 2ο Εξάμηνο
Κανονική εξέταση - 25 Ιουνίου 2012

Ονοματεπώνυμο

Θ Ε Μ Α Τ Α

Θ1. α) Ένας $n \times n$ πίνακας A λέγεται *αυτοδύναμος* αν $A^2 = A$. Δείξτε ότι αν λ είναι μια ιδιοτιμή ενός αυτοδύναμου πίνακα τότε είτε $\lambda = 0$ ή $\lambda = 1$.

β) Ένας $n \times n$ πίνακας A λέγεται *διαγωνοποιήσιμος* αν υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας P και διαγώνιος πίνακας D έτσι ώστε $P^{-1}AP = D$. Δείξτε ότι αν ο A είναι διαγωνοποιήσιμος τότε στις ιδιοτιμές του A αντιστοιχούν n γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα.

γ) Δείξτε ότι ο παρακάτω πίνακας διαγωνοποιείται: $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ -3 & 6 & 2 \end{bmatrix}$.

δ) Για τον παραπάνω πίνακα A δώστε τον πίνακα A^{2012} και τον A^{-1} , αν υπάρχει, χρησιμοποιώντας το γ). (Μην υπολογίσετε τον P^{-1}).

ε) Δείξτε ότι ένας 3×3 πίνακας της παρακάτω μορφής δεν είναι διαγωνοποιήσιμος: $A = \begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & b \end{bmatrix}$.

Θ2. α) Έστω $n \times n$ πίνακας A .

i) Διατυπώσατε το Θεώρημα Caley-Hamilton.

ii) Δώστε τον ορισμό του ελαχίστου πολυωνύμου $m_A(\lambda)$.

iii) Έστω πολυώνυμο $f(\lambda)$ τέτοιο ώστε $f(A) = 0$. Δείξτε ότι το $m_A(\lambda)$ διαιρεί το $f(\lambda)$.

iv) Βρείτε το ελάχιστο πολυώνυμο του πίνακα: $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -11 & 0 & 1 \\ -22 & -4 & 4 \end{bmatrix}$.

v) Για τον παραπάνω πίνακα A δώστε τον πίνακα A^{2012} και τον A^{-1} , αν υπάρχει.

β) Έστω 3×3 πίνακας A με χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\chi_A(\lambda) = (\lambda - 2)^3$.

i) Βρείτε τις πιθανές μορφές Jordan για τον A .

ii) Για την κάθε πιθανή μορφή Jordan του ερωτήματος i), βρείτε τους στοιχειώδεις διαιρέτες του A , το ελάχιστο πολυώνυμο $m_A(\lambda)$ και την διάσταση του ιδιοχώρου $V(2)$.

iii) Σε ποιά περίπτωση ο A διαγωνοποιείται; Συνδέστε την απάντησή σας με δύο εξηγήσεις.

Θ 3. Α) Έστω V ένας Ευκλείδειος διανυσματικός χώρος και A ένας $n \times n$ πίνακας.

i) Να δείξετε ότι, ο πίνακας A είναι ο πίνακας ενός ορθογώνιου μετασχηματισμού ως προς μια ορθοκανονική βάση του V , αν και μόνο αν $A^T = A^{-1}$.

ii) Δίνεται ο γραμμικός μετασχηματισμός $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ (ο $\mathbb{R}^3$ θεωρείται με την κανονική του βάση) με

$$T(x, y, z) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{2}{3}y + \frac{1}{3\sqrt{2}}z, \frac{1}{3}y - \frac{4}{3\sqrt{2}}z, \frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{2}{3}y - \frac{1}{3\sqrt{2}}z \right)$$

1. Να εξετάσετε αν ο T είναι ισομετρικός.

2. Να βρείτε τον T^* και να δείξετε ότι είναι $T^*T = I$.

Β) Έστω M ο υπόχωρος του $\mathbb{R}^4$ που παράγεται από τα διανύσματα $v_1 = (1, 1, 1, 1)$, $v_2 = (1, 1, 2, 4)$ και $v_3 = (1, -1, 2, 6)$.

i) Να βρείτε το ορθογώνιο συμπλήρωμα $M^\perp$ του M .

ii) Να βρείτε από μια ορθοκανονική βάση για τον καθένα από τους υποχώρους $M^\perp$, M .

Θ 4. i) Να δείξετε ότι τα ιδιοδιανύσματα ενός συμμετρικού πίνακα που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές είναι ορθογώνια μεταξύ τους.

ii) Για τον πίνακα $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ να βρείτε έναν ορθογώνιο πίνακα Q και έναν διαγώνιο πίνακα Δ ώστε να ισχύει: $A = Q\Delta Q^T$.

iii) Δίνεται η εξίσωση $3x^2 + 3z^2 + 4xy + 8xz + 4yz - 8x - 4y - 6z + 4 = 0$. Να προσδιοριστεί ένα νέο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων ως προς το οποίο, η εξίσωση να έχει την κανονική της μορφή και κατόπιν, αφού βρείτε την κανονική μορφή, να αναγνωρίσετε το είδος της επιφάνειας που παριστάνει.

Τα θέματα είναι ισοδύναμα. Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ