ΣΕΜΦΕ 2ο Εξάμηνο - Μάρτιος 2014
Γραμμική Άλγεβρα και Εφαρμογές

Ονοματεπώνυμο ....

Θ Ε Μ Α Τ Α

Θ1. i) Έστω V ένας διανυσματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο και $T : V \to V$ ένας ερμιτιανός μετασχηματισμός. Να δείξετε ότι οι ιδιοτιμές του T είναι πραγματικοί αριθμοί. **(0.5μ)**

ii) Δίνεται ο γραμμικός μετασχηματισμός $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ τέτοιος ώστε $Te_1 = e_1 - 2e_2 + e_3$, $Te_2 = e_1 + e_2 + e_3$, $Te_3 = -2e_1 + e_2 - e_3$, όπου $\{e_1, e_2, e_3\}$ η κανονική βάση του $\mathbb{R}^3$. Να βρεθεί ο τύπος του T και ο συζυγής T^* του T. **(1.5μ)**

iii) Έστω δύο $\nu \times \nu$ πίνακες A και B τέτοιοι ώστε $AB = BA$. Αν ο B έχει ν απλές ιδιοτιμές, να δείξετε ότι υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας P τέτοιος ώστε οι πίνακες $P^{-1}AP$ και $P^{-1}BP$ να είναι διαγώνιοι. **(1.5μ)**

Θ2. i) Βρείτε για ποιες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$, ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\alpha+1 & \alpha-1 & \alpha-3 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

είναι διαγωνοποιήσιμος μέσω μετασχηματισμού ομοιότητας και για ποιες όχι. **(1.5μ)**

ii) Για τις τιμές του α για τις οποίες ο πίνακας A του i) δεν είναι διαγωνοποιήσιμος, κατασκευάστε πλήρως την κανονική μορφή Jordan του A και τον αντίστοιχο πίνακα ομοιότητας. **(1.5μ)**

Θ 3. Δίνεται η εξίσωση $2x_1^2 + 5x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 - 4x_1x_3 + 2x_2x_3 - 1 = 0 \quad (1)$.

i) Να γραφεί η (1) σε μορφή εξίσωσης πινάκων και να αιτιολογηθεί ότι ο πίνακας που αντιστοιχεί στην (1) είναι ο

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 5 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}. \qquad \textbf{(0.5μ)}$$

ii) Να βρεθεί διαγώνιος πίνακας Δ και ορθογώνιος πίνακας Q τέτοιοι ώστε $A = Q\Delta Q^\top$. **(2μ)**

iii) Να αναχθεί η εξίσωση (1) στην κανονική της μορφή και να βρεθεί το είδος της επιφάνειας που παριστάνει. **(1μ)**

Τα θέματα είναι ισοδύναμα Διάρκεια εξέτασης 2,5 ώρες

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ