ΣΕΜΦΕ 2ο Εξάμηνο επαναληπτική εξέταση - Οκτώβριος 2011 (18–10–11)
Γραμμική Άλγεβρα και Εφαρμογές

Ονοματεπώνυμο ....

Θ Ε Μ Α Τ Α

Θ1. α) Έστω A αντιστρέψιμος $n \times n$ πίνακας και έστω λ ιδιοτιμή του A.
i) Δείξτε ότι $\lambda \neq 0$.
ii) Δείξτε ότι λ^{-1} ιδιοτιμή του A^{-1}.
iii) Δείξτε ότι οι πίνακες A και A^{-1} έχουν τα ίδια ιδιοδιανύσματα.
β) Δίνεται ο πίνακας:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -5 & 5 & -4 \end{bmatrix}.$$

i) Βρείτε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A.
ii) Βρείτε τους ιδιοχώρους του A.
iii) Βρείτε αντιστρέψιμο πίνακα P τέτοιο ώστε $P^{-1}AP = D$, όπου D διαγώνιος.

Θ2. α) Έστω A ένας $n \times n$ πίνακας. Διατυπώσατε το Θεώρημα Caley-Hamilton. Στη συνέχεια δώστε τον ορισμό του ελαχίστου πολυωνύμου του A.
β) Δείξτε ότι το ελάχιστο πολυώνυμο ενός $n \times n$ πίνακα A διαιρεί κάθε άλλο πολυώνυμο που μηδενίζεται από τον A.
γ) Βρείτε το ελάχιστο πολυώνυμο του πίνακα A του Θέματος 1β).
δ) Δίνεται ο πίνακας:

$$E = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 2 \end{bmatrix}.$$

Υπολογίστε τον πίνακα $B = 3E^{729} - 2E$.

Θ 3. **Α** Έστω V ένας διανυσματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο $\langle\, , \rangle$ και $T : V \to V$ ένας γραμμικός μετασχηματισμός. Να δείξετε ότι η απεικόνιση $T^\star : V \to V$, η οποία για κάθε $x, y \in V$ ικανοποιεί τη σχέση $\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^\star y\rangle$ είναι γραμμική και μοναδική.

Β) α) Έστω ο διανυσματικός χώρος $\mathbb{C}^3$ (με το κανονικό εσωτερικό γινόμενο) και ο γραμμικός μετασχηματισμός

$$T(x, y, z) = (ix + (2 + 3i)y, 3x + (3 - i)z, (2 - 5i)y + iz)\,.$$

Να βρεθεί ο συζυγής μετασχηματισμός $T^\star$ του T.

β) Έστω V ένας διανυσματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο $\langle\, , \rangle$ και $T : V \to V$ ένας γραμμικός μετασχηματισμός. Αν ο $T \in \mathcal{L}(V)$ είναι αντισυμμετρικός να δειχθεί ότι $\langle \mathbf{x}\, , T\mathbf{x}\rangle = 0$, για κάθε $\mathbf{x} \in V$.

Θ 4. **Α** Έστω M ο υπόχωρος του $\mathbb{R}^4$ που παράγεται από τα διανύσματα $v_1 = (3, 0, 6, 0)$, $v_2 = (0, -1, 2, 1)$ και $v_3 = (2, 9, 11, 0)$. Να βρεθούν:
i) Το ορθογώνιο συμπλήρωμα $M^\perp$ του M.
ii) μια ορθοκανονική βάση για τον καθένα από τους υποχώρους M, $M^\perp$.
Β) Δίνεται η τετραγωνική μορφή $F(x) = x^2 + y^2 + z^2 + 4xy + 4xz + 4yz$. Να βρεθούν:
i) Ο μετασχηματισμός $X = QY$, ο οποίος ανάγει την F στην κανονική της μορφή.
ii) Το είδος της επιφάνειας που παριστάνει η εξίσωση $F(x) = 1$.

Τα θέματα είναι ισοδύναμα   Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ