



ΣΕΜΦΕ Γραμμική Άλγεβρα και Εφαρμογές 2ο Εξάμηνο
Επαναληπτική εξέταση - 20 Σεπτεμβρίου 2012

Ονοματεπώνυμο

Θ Ε Μ Α Τ Α

ΘΕΜΑ 1. α) Έστω $n \times n$ πίνακας A και έστω λ μια ιδιοτιμή του A . Δείξτε ότι το λ^3 είναι μια ιδιοτιμή του πίνακα A^3 .

β) Δείξτε ότι ο παρακάτω πίνακας διαγωνοποιείται: $B = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

γ) Για τον παραπάνω πίνακα B δώστε έναν τύπο για την εύρεση του πίνακα B^{2012} .

δ) Δείξτε ότι ο παρακάτω 3×3 πίνακας δεν είναι διαγωνοποιήσιμος: $D = \begin{bmatrix} 7 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$.

ΘΕΜΑ 2. α) Έστω $n \times n$ πίνακας A .

i) Δώστε τον ορισμό του χαρακτηριστικού πολυωνύμου $\chi_A(\lambda)$ και του ελαχίστου πολυωνύμου $m_A(\lambda)$.

ii) Διατυπώσατε το Θεώρημα Caley-Hamilton.

iii) Δείξτε ότι το $m_A(\lambda)$ διαιρεί το $\chi_A(\lambda)$.

β) Έστω 3×3 πίνακας G με χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\chi_G(\lambda) = (\lambda - 7)^3$.

i) Βρείτε τις πιθανές μορφές Jordan για τον G .

ii) Σε ποιά περίπτωση ο G διαγωνοποιείται; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

Θ 3. Α) Έστω V ένας διανυσματικός χώρος και $T : V \rightarrow V$ ένας γραμμικός μετασχηματισμός. Να δείξετε ότι:

i) Ο T είναι ερμιτιανός αν και μόνο αν ο πίνακας του T , ως προς μια ορθοκανονική βάση του V , είναι ερμιτιανός.

ii) Οι ιδιοτιμές ενός ερμιτιανού πίνακα είναι πραγματικοί αριθμοί.

Β) Να εξετάσετε αν ο μετασχηματισμός $T : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$,

$$T(x, y, z) = (2x + (1 + i)y + 3iz, (1 - i)x + y + (3 + 2i)z, -3ix + (3 - 2i)y)$$

είναι ερμιτιανός (αυτοσυζυγής), ατιολογώντας την απάντησή σας.

Θ 4. Α Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$. Να βρείτε έναν ορθογώνιο πίνακα Q και έναν διαγώνιο πίνακα Δ ώστε να ισχύει: $A = Q\Delta Q^T$.

Β i) Να βρεθεί κατάλληλο σύστημα συντεταγμένων ώστε η εξίσωση $9x^2 + 6y^2 - 4xy + 16x - 8y - 2 = 0$ να έχει την κανονική της μορφή.

ii) Να βρεθεί το είδος της καμπύλης που παριστάνει η εξίσωση.

Τα θέματα είναι ισοδύναμα. Διάρκεια εξέτασης 2 ώρες και 30'.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ