

ΦΥΛΛΑΔΙΟ 1
Γραμ. Άλγεβρα και Εφαρμογές
Σ.Ε.Μ.Φ.Ε 2014-15

1. Σε ένα Ευκλείδειο διανυσματικό χώρο V θεωρούμε τα γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$. Ναδειχθεί ότι υπάρχουν αριθμοί $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ τέτοιοι ώστε το διάνυσμα $\mathbf{u} + \kappa\mathbf{v} + \lambda\mathbf{w}$ να είναι ορθογώνιο προς τα $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$.

2. Δίνεται ο διανυσματικός χώρος $\mathbb{R}^4$ με το κανονικό εσωτερικό γινόμενο και τα διανύσματα $\mathbf{a}_1 = (2, 1, -5, 0)$, $\mathbf{a}_2 = (3, -1, 1, 0)$.

(i) Να επεκτείνετε σε μια βάση $\beta = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4\}$ του $\mathbb{R}^4$, όπου τα $\mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4$ να είναι διανύσματα από την κανονική βάση του $\mathbb{R}^4$.

(ii) Να βρείτε τον πίνακα του κανονικού εσωτερικού γινομένου ως προς τη βάση β .

(iii) Να κατασκευάσετε από τη β μια ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^4$.

3. Θεωρούμε τον διανυσματικό χώρο $\Pi_2(\mathbb{R}) \equiv \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ όλων των 2×2 πραγματικών πινάκων.

(a) Να δείξετε ότι η απεικόνιση $f(A, B) = \text{tr}(AB^T) \equiv \text{ίχνος}(AB^T)$ είναι ένα εσωτερικό γινόμενο στον $\Pi_2(\mathbb{R})$.

(b) Δίνεται το υποσύνολο

$$S = \left\{ \eta_1 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \eta_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \eta_3 = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & -5 \end{bmatrix} \right\}$$

του υπόχωρου $\Pi_2^\Sigma(\mathbb{R})$ των συμμετρικών πινάκων.

(i) Να δείξετε ότι το S είναι μια βάση του $\Pi_2^\Sigma(\mathbb{R})$.

(ii) Με τη μέθοδο Gram-Schmidt να κατασκευάσετε από αυτή, ως προς το εσωτερικό γινόμενο f , μια ορθοκανονική βάση του $\Pi_2^\Sigma(\mathbb{R})$.

4. Έστω ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 6 & 7 & 6 \\ -6 & -7 & -6 \end{bmatrix}$. Να κατασκευάσετε μια διαγωνοποίηση

του A και να επιλύσετε πλήρως την εξίσωση $X^2 = A$.

5. Έστω ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Να κατασκευάσετε μια διαγωνοποίηση του

A και μια διαγωνοποίηση του A^5 . Στη συνέχεια, να υπολογίσετε τον πίνακα A^5 με εφαρμογή του Θεωρήματος Cayley – Hamilton.

6. Βρείτε για ποια τιμή της παραμέτρου a ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} -a+11 & 0 & a-3 \\ -14 & 1 & 14 \\ -a+3 & 0 & a+5 \end{bmatrix}$

είναι διαγωνοποιήσιμος. Έπειτα, για την τιμή του a που θα βρείτε, κατασκευάστε έναν πίνακα X για τον οποίο ισχύει $X^3 = A$.