ΦΥΛΛΑΔΙΟ 2
Γραμ. Άλγεβρα και Εφαρμογές
Σ.Ε.Μ.Φ.Ε 2014-15

1. Έστω V ένας πεπερασμένης διάστασης Ευκλείδειος διανυσματικός χώρος και V_1, V_2 δυο υπόχωροί του. Να αποδειχθούν οι σχέσεις:

$$\text{(i)}\quad (V_1+V_2)^\perp = V_1^\perp \cap V_2^\perp \qquad\qquad \text{(ii)}\quad (V_1\cap V_2)^\perp = V_1^\perp + V_2^\perp$$

2. Σε ένα Ευκλείδειο διανυσματικό χώρο V θεωρούμε τη βάση $\boldsymbol{\varepsilon} : \{\boldsymbol{\varepsilon_1} = (1,2,1),\ \boldsymbol{\varepsilon_2} = (1,1,2),\ \boldsymbol{\varepsilon_3} = (1,1,0)$, ως προς την οποία ένας γραμμικός μετασχηματισμός $T : V \to V$ έχει πίνακα τον $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \\ 2 & 7 & -3 \end{bmatrix}$. Αν οι συνιστώσες των στοιχείων της βάσης $\boldsymbol{\varepsilon}$ είναι ως προς μια ορθοκανονική βάση $\mathbf{u} = \{\mathbf{u_1},\ \mathbf{u_2},\ \mathbf{u_3}\}$ του V, να βρεθεί ο πίνακας του T^* ως προς τη βάση $\boldsymbol{\varepsilon}$.

3. Έστω V ένας διανυσματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο και $T : V \to V$ ένας γραμμικός μετασχηματισμός.

(i) Αν M είναι ένας υπόχωρος του V τέτοιος ώστε $T(M) \subseteq M$ να δειχθεί ότι είναι και $T^*(M^\perp) \subseteq M^\perp$.

(ii) Αν $V = \mathbb{R}^3$ και ο γραμμικός μετασχηματισμός $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ έχει πίνακα ως προς μια ορθοκανονική βάση τον $A = \begin{bmatrix} 4 & -23 & 17 \\ 11 & -43 & 30 \\ 15 & -54 & 37 \end{bmatrix}$, να βρεθεί ένα επίπεδο (π) τέτοιο ώστε $T(\pi) \subseteq (\pi)$.

4. Έστω V ένας διανυσματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο και $T, S : V \to V$ γραμμικοί μετασχηματισμοί. Αν συμβολίζουμε με $\mathcal{N}(T)$ τον πυρήνα του T και με $\mathcal{R}(T)$ το σύνολο τιμών του T, να δείξετε τις παρακάτω σχέσεις:

(i) $(T^*)^* = T$ **(ii)** $(TS)^* = S^*T^*$ **(iii)** $\mathcal{N}(T^*T) = \mathcal{N}(T)$

(iv) $\mathcal{R}(T^*)^\perp = \mathcal{N}(T)$ **(v)** $\mathcal{R}(T^*) = \mathcal{N}(T)^\perp$.

5. Δίνεται ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -i/\sqrt{2} & -1 \\ i/\sqrt{2} & 0 & i/\sqrt{2} \\ -1 & -i/\sqrt{2} & 1 \end{bmatrix}.$$

i) Να βρείτε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του A.
ii) Να βρείτε ένα ορθομοναδιαίο πίνακα Q και ένα διαγώνιο πίνακα Δ, ώστε να είναι $A = Q\Delta Q^*$

6. Έστω ένας πραγματικός συμμετρικός πίνακας A με όλες του τις ιδιοτιμές αρνητικές. Να αποδείξετε ότι υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας M τέτοιος ώστε $A = -MM^\top$.

7. Να υπολογίσετε την τιμή της παραμέτρου $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} -1 & \alpha-4 & 4-\alpha \\ -3 & 1-\alpha & 1+\alpha \\ -3 & -2 & 4 \end{bmatrix}$ να μην διαγωνοποιείται με μετασχηματισμό ομοιότητας. Έπειτα, για την τιμή του α που θα βρείτε, να κατασκευάσετε πλήρως την κανονική μορφή *Jordan* του A και τον αντίστοιχο πίνακα ομοιότητας.

Παράδοση μέχρι 19–6–2015 Σ. Καρανάσιος - Π. Ψαρράκος