

# ΦΥΛΛΑΔΙΟ 2-ΑΝΑΛΥΣΗ ΙΙΙ ΣΕΜΦΕ 2013-14

## ΤΡΙΠΛΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

1. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα  $\iiint_G xyz dx dy dz$ , όπου  $G$  είναι ο ορθός κύλινδρος με ύψους  $h$  και βάση τον δίσκο  $(x-2)^2 + (y-2)^2 \leq 1$ .

2. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$I = \iiint_G dx dy dz = \int_0^1 \left( \int_0^{2x} \left( \int_{x^2+y^2}^{x+y} dz \right) dy \right) dx$$

αφού πρώτα προσδιορίσετε και σχεδιάσετε το χωρίο  $G$ .

3. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα  $\iiint_G x dx dy dz$ , όπου  $G$  το χωρίο που περικλείεται από τις επιφάνειες  $y = x^2$ ,  $y = x + 2$ ,  $4z = x^2 + y^2$  και  $z = x + 3$ .

4. Να υπολογίσετε με τη βοήθεια του μετασχηματισμού σε σφαιρικές συντεταγμένες το ολοκλήρωμα

$$I = \iiint_G \frac{|xyz|}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} dx dy dz,$$

όπου  $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : a^2 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq b^2\}$ . (Υπόδειξη: Παρατηρήστε τη συμμετρία του χωρίου ως προς τα επίπεδα συντεταγμένων, το γεγονός ότι η συνάρτηση είναι άρτια ως προς  $x$ , ως προς  $y$  και ως προς  $z$ , και θεωρήστε κατάλληλο χωρίο για να απαλλαγείτε από την απόλυτη τιμή)

5. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα  $I = \iiint_G z dx dy dz$ , όπου το χωρίο  $G$  ορίζεται από τις ανισώσεις  $x^2 + y^2 \leq z^2$ ,  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ . Να σχολιάσετε το αποτέλεσμα που βρήκατε (ήταν αναμενόμενο;).

6. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\iiint_G \sqrt{2-x^2} dx dy dz,$$

όπου το χωρίο  $G$  φράσσεται από το παραβολοειδές  $z = 2x^2 + y^2$ , τον κύλινδρο  $z = 4 - y^2$  και τα επίπεδα  $x = 0$ ,  $y = 0$ .

7. Να προσδιοριστεί η μάζα του στερεού που φράσσεται από τις επιφάνειες  $x^2 + y^2 = 2y$ ,  $z^2 = x^2 + y^2$  και έχει συνάρτηση πυκνότητας  $\rho(x, y, z) = k\sqrt{x^2 + y^2}$ , όπου  $k$  σταθερός αριθμός.

**Παράδοση μόνο των ασκήσεων 1, 4, 6, 7 έως 12-3-2014**