

ΦΥΛΛΑΔΙΟ 3 -ΑΝΑΛΥΣΗ ΙΙΙ ΣΕΜΦΕ 2013-14
ΕΠΙΚΑΜΠΥΛΙΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

1. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int f ds$, στις παρακάτω περιπτώσεις:

i) $f(x, y, z) = x + y^2 + e^z$ και $\mathbf{r}(t) = (|t| + t, |t - 1|, t)$, $t \in [-1, 3]$.

ii) $f(x, y, z) = 2x - y^{\frac{1}{2}} + 2z^2$ και $\mathbf{r}(t) = \begin{cases} (t, t^2, 0), & \text{αν } 0 \leq t \leq 1 \\ (1, 1, t - 1), & \text{αν } 1 \leq t \leq 3 \end{cases}$

2. Δίνεται το ευθύγραμμο τμήμα P_1P_2 με $P_1(1, 2, 3)$, $P_2(3, 1, 8)$ και οι παραμετρικές του εκφράσεις

a) $\mathbf{r}_1(t) = (1 + 2t, 2 - t, 3 + 5t)$, $0 \leq t \leq 1$

b) $\mathbf{r}_2(t) = (1 + 2t^2, 2 - t^2, 3 + 5t^2)$, $-1 \leq t \leq 1$

c) $\mathbf{r}_3(t) = (3 - 2t, 1 + t, 8 - 5t)$, $0 \leq t \leq 1$

i) Να εξετάσετε ποιές από τις παραμετρικές καμπύλες $\mathbf{r}_1(t)$, $\mathbf{r}_2(t)$, $\mathbf{r}_3(t)$ είναι ισοδύναμες και για τις ισοδύναμες να εξετάσετε αν δίνουν τον ίδιο ή αντίθετο προσανατολισμό στο P_1P_2 .

ii) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_{\mathbf{r}_i} \mathbf{F} d\mathbf{r}$, $i = 1, 2, 3$, όπου $\mathbf{F} = (x, y, z)$ και να σχολιάσετε, σε σχέση με το πρώτο ερώτημα, τα αποτελέσματα.

3. Δείξτε ότι αν γ είναι το σύνορο ενός οποιουδήποτε ορθογωνίου στο $\mathbb{R}^2$, τότε το ολοκλήρωμα $\oint_{\gamma} (x^2y^3 - 3y)dx + x^3y^2dy$ εξαρτάται από το εμβαδόν του ορθογωνίου και όχι από τη θέση του στο $\mathbb{R}^2$.

4. Θεωρείται γνωστό ότι ο πίνακας $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ περιγράφει στροφή κατά γωνία $\pi/2$ κατά τη φορά των δεικτών του ρολογιού. Αν D είναι ένας τόπος όπου εφαρμόζεται το θεώρημα του Green για το διανυσματικό πεδίο $\mathbf{F} = (P(x, y), Q(x, y))$ και $\mathbf{n}$ είναι το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στο σύνορο ∂D του D με φορά προς τα έξω, να δείξετε ότι ισχύει:

$$\oint_{\partial D} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds = \oint_{\partial D} -Qdx + Pdy = \iint_D \nabla \cdot \mathbf{F} dxdy.$$

(Υπόδ. Είναι $\mathbf{n} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{x'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|} \\ \frac{y'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|} \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{n} = (\frac{y'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|}, -\frac{x'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|})$ κ.λ.π.)

5. Δίνεται το διανυσματικό πεδίο $\mathbf{F} = \frac{-y}{x^2+y^2}\mathbf{i} + \frac{x}{x^2+y^2}\mathbf{j}$.

i) Να επαληθεύσετε το θεώρημα του Green στον κυκλικό δακτύλιο $D = \{(x, y) : a^2 \leq x^2 + y^2 \leq 1\}$.

ii) Να εξετάσετε αν ισχύει το θεώρημα του Green στο μοναδιαίο δίσκο $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

iii) Έστω γ μια απλή κλειστή καμπύλη θετικά προσανατολισμένη (αντίθετη φορά δεικτών του ρολογιού), η οποία περιέχει στο εσωτερικό της τον κύκλο $C_a : \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq a^2\}$. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\oint_{\gamma} \mathbf{F} d\mathbf{r}$.

6. Να αποδειχθεί ότι η τιμή του επικαμπυλίου ολοκληρώματος του διανυσματικού πεδίου $\mathbf{F} = (2xy^2z, 2x^2yz, x^2y^2)$ στον κύκλο $x^2 + y^2 = 1$, $z = 2$ είναι ανεξάρτητο από τον προσανατολισμό της καμπύλης.

Ημερομηνία παράδοσης: Θα ανακοινωθεί κατά τη διάρκεια του εξαμήνου