ΦΥΛΛΑΔΙΟ 4 -ΑΝΑΛΥΣΗ ΙΙΙ ΣΕΜΦΕ 2013-14
ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΚΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ-ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

1. Να υπολογίσετε το επιφανειακό ολοκλήρωμα της συνάρτησης $\sin(x^2+z^2+y-4)$ στην επιφάνεια $x^2+z^2 \leq 1$, $y=4$.

2. Να υπολογιστεί το επιφανειακό ολοκλήρωμα του διανυσματικού πεδίου $\mathbf{F}=(z,\, x,\, -3y^2z)$ στην εξωτερική επιφάνεια του κυλίνδρου $x^2+y^2=1$, $0 \leq z \leq 5$ συμπεριλαμβανομένων και των δύο βάσεων $z=0$, $z=5$.

3. i) Να δειχθεί ότι ισχύει: $\mathrm{div}(f\mathbf{F}) = \mathbf{F}\cdot\nabla f + f\mathrm{div}\mathbf{F}$ για κάθε διανυσματικό πεδίο $\mathbf{F}$ του $\mathbb{R}^3$ και για κάθε βαθμωτή συνάρτηση $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$.

ii) Αν $\mathbf{F}=\nabla f$ και το $\mathbf{F}$ είναι σωληνοειδές (δηλαδή είναι $\mathrm{div}\mathbf{F}=0$) να δειχθεί ότι:

$$\iint\limits_{\mathbf{S}} f\mathbf{F}\mathrm{d}\mathbf{S} = \iiint\limits_{G} (\mathbf{F}\cdot\mathbf{F})\mathrm{d}v,$$

όπου $\mathbf{S}$ μια κατά τμήματα λεία κλειστή επιφάνεια με θετική όψη την εξωτερική, η οποία είναι σύνορο ενός απλού χωρίου G του $\mathbb{R}^3$.

iii) Δίνεται το διανυσματικό πεδίο $\mathbf{F} = 2x\mathbf{i} + y\mathbf{j} - 3z\mathbf{k}$. Δείξτε ότι υπάρχει συνάρτηση $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $\mathbf{F}=\nabla f$ και υπολογίστε το επιφανειακό ολοκλήρωμα $\iint\limits_{\mathbf{S}} f\mathbf{F}\mathrm{d}\mathbf{S}$, όπου $\mathbf{S}$ η εξωτερική επιφάνεια του κύβου $G=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : 0\leq x\leq 1,\, 0\leq y\leq 1,\, 0\leq z\leq 1\}$ (Υπόδειξη: ελέγξτε αν μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το ii)).

4. Δίνεται το διανυσματικό πεδίο $\mathbf{F} = \left(-\dfrac{y}{x^2+y^2},\, \dfrac{x}{x^2+y^2},\, z\right)$, $(x,\, y,\, \lambda) \neq (0,\, 0,\, \lambda)$, $\lambda\in\mathbb{R}$.

i) Να δειχθεί ότι $\nabla\times\mathbf{F} = \mathbf{0}$ (δηλαδή $\mathrm{rot}\mathbf{F}=\mathbf{0}$).

ii) Να υπολοιστεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα του $\mathbf{F}$ κατά μήκος του κύκλου $\boldsymbol{\gamma} : \mathbf{r}(t) = (\cos t,\, \sin t,\, 0)$.

iii) Να σχολιαστούν, σε σχέση με το θεώρημα Stokes, τα αποτελέσματα i) και ii).

5. Να επαληθευθεί το θεώρημα Gauss για το διανυσματικό πεδίο $\mathbf{F}=x^3\mathbf{i}+y^3\mathbf{j}+z\mathbf{k}$ και την επιφάνεια $\mathbf{S}$, η οποία αποτελείται από τμήματα των επιφανειών $x^2+y^2=1$, $z=0$, $z=x+2$.

6. Να δειχθεί ότι το διανυσματικό πεδίο $\mathbf{F}=(x,\, x,\, -z)$ είναι σωληνοειδές. Κατόπιν:

i) Να βρεθεί ένα διανυσματικό πεδίο $\mathbf{G}$ τέτοιο ώστε $\mathbf{F}=\mathrm{rot}\,\mathbf{G}$.

ii) Έστω $\mathbf{S}$ μια λεία επιφάνεια που έχει ως σύνορο την θετικά προσανατολισμένη καμπύλη $(c) : \frac{y^2}{9}+\frac{x^2}{4}=1$, $z=5$. Να υπολογιστεί το επιφανειακό ολοκλήρωμα $I=\iint\limits_{\mathbf{S}}\mathbf{F}\mathrm{d}\mathbf{S}$ πάνω στη θετική όψη της $\mathbf{S}$.

Ημερομηνία παράδοσης: Θα ανακοινωθεί κατά τη διάρκεια του εξαμήνου