

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΓΡΑΠΤΗ ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ
«ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΚΑΙ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ»
28 – 1 - 2010

ΘΕΜΑ 1°

(α) Έστω V ένας διανυσματικός χώρος διάστασης n . Να αποδείξετε ότι ένα υποσύνολο $S = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ του V είναι βάση του V αν κάθε στοιχείο του V γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων του υποσυνόλου S .

Μονάδες 1

(β) Δίνεται ο υπόχωρος V_1 του $\mathbb{R}^5$ ο οποίος παράγεται από τα διανύσματα $x_1 = (1, 2, 0, -1, 3)$, $x_2 = (-1, 1, 3, 2, -2)$ και $x_3 = (2, 7, 3, -1, 7)$.

- (i) Να βρείτε μια βάση και τη διάσταση του V_1 .
- (ii) Να επεκτείνετε τη βάση του V_1 που βρήκατε, σε μια βάση του $\mathbb{R}^5$.
- (iii) Να βρείτε ένα υπόχωρο V_2 του $\mathbb{R}^5$, τέτοιο ώστε να είναι $V_1 \oplus V_2 = \mathbb{R}^5$. Να αιτιολογήσετε την επιλογή του V_2 και να αποδείξετε ότι πράγματι ικανοποιεί την παραπάνω σχέση.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2°

Δίνονται το επίπεδο $(\pi): x + y + 3z + 18 = 0$ και η ευθεία

$$(\varepsilon): \frac{x-1}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z-1}{4}.$$

- (i) Να βρείτε το σημείο τομής της ευθείας (ε) με το επίπεδο (π) .
- (ii) Να βρεθεί η προβολή της (ε) στο επίπεδο (π) .
- (iii) Να βρεθεί η εξίσωση του επιπέδου που περιέχει την (ε) και είναι κάθετο στο (π) .

Μονάδες 2,5

ΘΕΜΑ 3°

Δίνεται η γραμμική απεικόνιση $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ με τύπο

$$T(x, y, z) = (x + y, 2x + 2y, -x + y + z).$$

- (i) Να βρεθεί ο πίνακας της T ως προς την κανονική βάση του $\mathbb{R}^3$.
- (ii) Να βρεθεί ο πυρήνας $\text{Ker}T$ της T και μια βάση του.
- (iii) Να βρεθεί η εικόνα $\text{Im}T$ της T , μια βάση της και να επαληθευθεί το θεώρημα διάστασης.

Μονάδες 2,5

ΘΕΜΑ 4°

Έστω οι πραγματικοί πίνακες $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & 4 \\ 3 & 4 & -5 & 6 \\ 1 & 3 & -5 & 7+\alpha \end{bmatrix}$ και $B = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{bmatrix}$.

- (i) Βρείτε τις συνθήκες που πρέπει να ικανοποιούν οι παράμετροι $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ ώστε ο 4×5 πίνακας $[A, B]$ να έχει βαθμό δύο ($\text{βαθμ}([A, B]) = 2$).
- (ii) Να λύσετε το γραμμικό σύστημα $AX = B$ για τυχαίο $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \{(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4 : \text{βαθμ}([A, B]) = 2\}$.

Μονάδες 2

Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες. Καλή επιτυχία.