

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ-ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ
ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΠΕΡΙΟΔΟΣ - ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΣ 2004

Θέμα 1^ο. Έστω U ο υπόχωρος του R^4 που παράγεται από τα στοιχεία $(1, -1, 1, \alpha), (2, 1, 0, \beta), (5, -2, 3, \gamma)$ και $(3, -3, 3, \delta)$.

(i) Να προσδιορίσετε τις ικανές και αναγκαίες συνθήκες μεταξύ των α, β, γ και δ έτσι ώστε να ισχύει:

(i) $\dim U=2$. (ii) $\dim U=3$.

(ii) Να εξετάσετε, αν το καθένα από τα σύνολα

$$A = \{(\alpha, \beta, \gamma, \delta) : \dim U=2\} \text{ και } B = \{(\alpha, \beta, \gamma, \delta) : \dim U=3\}$$

είναι υπόχωροι του R^4 . Στην περίπτωση που είναι υπόχωρος, να προσδιορίσετε μία βάση του και τη διάστασή του.

Θέμα 2^ο. (α) Έστω X, Y διανυσματικοί χώροι πάνω στο σώμα $K = R \text{ ή } C$ και $T : X \rightarrow Y$ μία γραμμική απεικόνιση. Αν $\{u_1, u_2, \dots, u_r\}$ είναι μία βάση του $\ker T = N(T)$ και $\{u_1, u_2, \dots, u_r, u_{r+1}, \dots, u_m\}$ είναι μία βάση του X , να αποδείξετε ότι το σύνολο $\{T(u_{r+1}), \dots, T(u_m)\}$ είναι βάση του $\text{Im } T$.

(β) Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}, \alpha \in R$.

(i) Να αποδείξετε ότι $(A - \alpha I_3)^3 = O$.

(ii) Αν $\alpha \neq 0$, να αποδείξετε ότι ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος και να υπολογίσετε τον A^{-1} .

Θέμα 3^ο. Έστω $T : R^3 \rightarrow R^3$ η γραμμική απεικόνιση με τύπο

$$T(x, y, z) = (3x - 2y, x + y - z, x - z)$$

και ο υπόχωρος $U = \{(x, y, z) \in R^3 : x - 2y + z = 0\}$ του R^3 .

(i) Να αποδείξετε ότι η T είναι 1-1.

(ii) Να βρείτε μία βάση του U και μία βάση του $T(U)$.

(iii) Να βρείτε τον πίνακα της T ως προς τη βάση

$$u = \{u_1 = (1, 1, 1), u_2 = (1, 1, 0), u_3 = (1, 0, 0)\} \text{ του } R^3.$$

Θέμα 4^ο. Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1 : \frac{x-1}{2} = y = \frac{z+1}{3}$ και $\varepsilon_2 : \begin{cases} x - y + 2z - 6 = 0 \\ 2x + y - 3z - 1 = 0 \end{cases}$.

(i) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες τέμνονται και να προσδιορίσετε το σημείο τομής τους.

(ii) Να βρείτε την εξίσωση του επιπέδου (π) που ορίζουν οι ευθείες ε_1 και ε_2 .

(iii) Να βρείτε την εξίσωση του επιπέδου που περιέχει την ε_1 και είναι κάθετο στο επίπεδο (π).

Τα θέματα είναι ισοδύναμα. Διάρκεια εξέτασης: 3 ώρες.

Καλή Επιτυχία.