

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΓΡΑΠΤΗ ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ
« ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ ΚΑΙ ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ »
12 – 2 – 2009

ΘΕΜΑ 1^ο

(α) Έστω διανυσματικός χώρος V διάστασης n . Να αποδείξετε ότι κάθε γραμμικώς ανεξάρτητο υποσύνολο του V με k στοιχεία, $1 \leq k \leq n$, επεκτείνεται σε βάση του V .

Μονάδες 1

(β) Δίνονται οι διανυσματικοί υπόχωροι του $\mathbb{R}^3$

$$V_1 = \{(x, y, z) : x + 2y - 3z = 0\} \text{ και } V_2 = \{(x, y, z) : x = t, y = 2t, z = -3t, t \in \mathbb{R}\}.$$

Να βρείτε τις διαστάσεις και βάσεις των υποχώρων V_1, V_2 και να αποδείξετε ότι:

$$V_1 + V_2 = \mathbb{R}^3.$$

Είναι ο $\mathbb{R}^3$ το ευθύ άθροισμα των υποχώρων V_1, V_2 ; Ποια είναι η γεωμετρική ερμηνεία των V_1, V_2 ;

Μονάδες 1,5

ΘΕΜΑ 2^ο

Δίνονται το επίπεδο $\Pi : x + 2y - 3z + 11 = 0$ και η ευθεία

$$\varepsilon : \frac{x-1}{5} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{3}.$$

- (i) Να αποδειχθεί ότι η ευθεία ε είναι παράλληλη προς το επίπεδο Π και δεν ανήκει σ' αυτό.
- (ii) Να βρεθούν οι αναλυτικές εξισώσεις της ευθείας δ που είναι συμμετρική της ευθείας ε ως προς το επίπεδο Π .
- (iii) Να βρεθεί η απόσταση της ε από το επίπεδο Π .

Μονάδες 2,5

ΘΕΜΑ 3^ο

(α) Να αποδείξετε ότι το σύνολο

$$G = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \text{ και } \det A = 1 \right\}$$

είναι αβελιανή ομάδα με πράξη τον πολλαπλασιασμό πινάκων.

Μονάδες 1

(β) Να περιγράψετε τις επιφάνειες που ορίζονται από τις εξισώσεις:

(i) $x - 5y = 5,$

(ii) $x^2 + y^2 = 1,$

(iii) $x^2 + y^2 + z^2 + 6x - 8y + 24 = 0,$

(iv) $(x + 2y - z)^2 - 3x + y = 0$

(v) $x^2 - y^2 = 0.$

Μονάδες 1,5

ΘΕΜΑ 4^ο

Να υπολογίσετε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ για τις οποίες τα συστήματα

$$\begin{cases} x - 2y + z = \alpha \\ x + y - z = 1 \\ x + 4y - 3z = 2 \end{cases} \quad \text{και} \quad \begin{cases} x - 3y + 3z = 1 \\ 2x + y - 8z = -5 \\ x - y - z = \beta \end{cases}$$

είναι συμβιβάσιμα. Για τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ που θα βρείτε, να ελέγξετε αν οι γενικές λύσεις των δύο συστημάτων έχουν κοινά στοιχεία, τα οποία και να υπολογίσετε.

Μονάδες 2,5