

**ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ
ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΗ ΓΡΑΠΤΗ ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ
«ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΚΑΙ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ»
31 - 8 - 2009**

ΘΕΜΑ 1°

Δίνονται οι διανυσματικοί υπόχωροι του $\mathbb{R}^3$

$$V_1 = \{(x, y, z) : x = y = z\} \text{ και } V_2 = \{(2x + y, x, -y) : x, y \in \mathbb{R}\}.$$

- (α) Να βρείτε τις διαστάσεις και βάσεις των υποχώρων V_1, V_2 .
(β) Να αποδείξετε ότι $V_1 \subset V_2$.
(γ) Να βρείτε μία βάση $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ του $\mathbb{R}^3$, έτσι ώστε $\{\mathbf{a}\}$ είναι βάση του V_1 και $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ είναι βάση του V_2 .

Μονάδες 2,5

ΘΕΜΑ 2°

(Α) Δίνονται τα μη συνευθειακά σημεία του χώρου A, B και Γ με $\mathbf{OA} = \mathbf{a}$, $\mathbf{OB} = \mathbf{b}$ και $\mathbf{OG} = \mathbf{c}$, όπου O είναι η αρχή των αξόνων.

- (α) Να βρείτε τη διανυσματική εξίσωση του επιπέδου Π που ορίζεται από τα σημεία A, B και Γ.
(β) Να βρείτε την απόσταση του O από το επίπεδο Π.

Μονάδες 1,5

(Β) Να περιγράψετε τις επιφάνειες που ορίζονται από τις εξισώσεις:

- (i) $y = 2x$, (ii) $x^2 - y^2 = 1$,
(iii) $x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 8y + 4z + 28 = 0$, (iv) $(x + y - z)^2 + 2x - y = 0$
(v) $x^2 + y^2 = z^2$.

Μονάδες 1

ΘΕΜΑ 3°

(Α) Να αποδείξετε ότι κάθε διανυσματικός χώρος $V \neq \{0\}$, ο οποίος έχει ένα πεπερασμένο υποσύνολο $S = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ γεννητόρων, έχει μία βάση.

Μονάδες 1,5

(Β) Έστω η ομάδα $(G, \cdot)$.

- (α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $a, b \in G$ ισχύει $(a \cdot b)^{-1} = b^{-1} \cdot a^{-1}$, όπου με x^{-1} συμβολίζουμε το συμμετρικό (αντίστροφο) του $x \in G$.
(β) Αν ισχύει η σχέση $(a \cdot b)^2 = a^2 \cdot b^2$ για κάθε $a, b \in G$, να αποδείξετε ότι η ομάδα G είναι αντιμεταθετική.

Μονάδες 1

ΘΕΜΑ 4°

Έστω οι πραγματικοί πίνακες

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 4 & 3 & a^2 - a & 1 \\ 1 & a - 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ και } B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ a - 3 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

- (i) Υπολογίστε τις τιμές του a για τις οποίες ο βαθμός του πίνακα A είναι 2.
(ii) Για $a = 2$, να λύσετε το γραμμικό σύστημα $AX = B$.

Μονάδες 2,5