

Ανάλυση ΙΙΙ

Ονοματεπώνυμο

Θ Ε Μ Α Τ Α

Θ 1. α) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$\iint_D (x^2 - y) dx dy,$$

όπου D το φραγμένο χωρίο που βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο και περικλείεται από τους άξονες Ox , Oy και τις ευθείες $y = 5 - x$ και $y = 8 - 4x$. (1.5μ)

β) Επαληθεύστε το θεώρημα του Green για το διανυσματικό πεδίο $\mathbf{F}(x, y) = (x^2y, xy)$ και το θετικά προσανατολισμένο χωρίο του α) ερωτήματος. (1μ)

Θ 2. α) Δείξτε ότι η δύναμη $\mathbf{F}(x, y, z) = (\cos y, \sin z - x \sin y, y \cos z)$ ορίζει ένα αστρόβιλο διανυσματικό πεδίο. (0.5μ)

β) Να προσδιορίσετε ένα βαθμωτό δυναμικό της. (1μ)

γ) Να βρείτε το έργο που παράγει η δύναμη $\mathbf{F}$, όταν μετακινεί το σημείο εφαρμογής της από το σημείο $O(0, 0, 0)$ ως το σημείο $A(\pi, 0, \pi)$, κατά μήκος του ευθυγράμμου τμήματος OA . (1μ)

Θ 3. Επαληθεύστε το θεώρημα του Gauss για το διανυσματικό πεδίο $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, z)$ και το ημισφαιρικό χωρίο $G = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \leq 0\}$. (Θεωρείται γνωστό ότι ο όγκος σφαίρας ακτίνας r είναι $V = \frac{4}{3}\pi r^3$). (2.5μ)

Θ 4. Έστω S η επίπεδη επιφάνεια της οποίας το σύνορο C είναι το τρίγωνο με κορυφές $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ και $(0, 0, 1)$, δηλαδή το τμήμα του επιπέδου $x + y + z = 1$ που βρίσκεται στο πρώτο ογδομήριο. Υπολογίστε, με τη βοήθεια κατάλληλου επιφανειακού ολοκληρώματος, την κυκλοφορία $\oint_C \mathbf{F} d\mathbf{r}$ του διανυσματικού πεδίου $\mathbf{F}(x, y, z) = (-y, x, z)$ κατά μήκος της καμπύλης C , αφού πρώτα επιλέξετε τη φορά διαγραφής της C . (2.5μ)

Διάρκεια εξέτασης 2,5 ώρες

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ