



ΣΕΜΦΕ 3ο Εξάμηνο κανονική εξέταση - Μάρτιος 2011 (2–3–11)
Ανάλυση ΙΙΙ

Ονοματεπώνυμο

Θ Ε Μ Α Τ Α

Θ 1. α) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\iint_D 2xdxdy$, όπου

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy \geq 4, x + y \leq 5, x, y \geq 0\}. \quad (1.5\mu)$$

β) i) Να διατυπώσετε το θεώρημα του Green κάνοντας σχετικό γενικό σχήμα στο οποίο να εμφανίζονται όλες οι έννοιες που αναφέρονται στη διατύπωση του θεωρήματος. (0.60μ)

ii) Να υπολογίσετε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\oint_{\partial D} \mathbf{F} d\mathbf{r}$, όπου ∂D το σύνορο του χωρίου D του ερωτήματος α) και $\mathbf{F} = (x + 3, x^2 - y^2)$. (0.40μ)

Θ 2. Δίνεται ένα συνεχές διανυσματικό πεδίο $\mathbf{F}$ ορισμένο σε ένα ανοικτό υποσύνολο Ω του $\mathbb{R}^3$.

α) i) Πότε λέμε ότι το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα του $\mathbf{F}$ στο Ω είναι ανεξάρτητο του δρόμου; (0.50μ)

ii) Να δείξετε ότι το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα του $\mathbf{F}$ στο Ω είναι ανεξάρτητο του δρόμου αν και μόνο αν για κάθε κατά τμήματα C^1 -τάξης κλειστή καμπύλη γ του Ω ισχύει $\oint_{\gamma} \mathbf{F} d\mathbf{r} = 0$. (1.00μ)

β) i) Αν το Ω είναι απλώς συνεκτικός τόπος του $\mathbb{R}^3$ ποια ικανή και αναγκαία συνθήκη γνωρίζετε ώστε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα του $\mathbf{F}$ στο Ω να είναι ανεξάρτητο του δρόμου; (0.30μ)

ii) Να υπολογίσετε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $I = \int \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2}$ στον κύκλο $(x - 2)^2 + y^2 = 1$.

(0.70μ)

Θ 3. Δίνεται το διανυσματικό πεδίο $\mathbf{F} = (x^2 - 3x + 1, y, 2z - 2xz)$.

α) Να δείξετε ότι είναι $\operatorname{div} \mathbf{F} = 0$ και να βρείτε ένα διανυσματικό πεδίο $\mathbf{G}$ τέτοιο ώστε $\mathbf{F} = \operatorname{rot} \mathbf{G}$.

(1.5μ)

β) Με τη βοήθεια του θεωρήματος Stokes (ή διαφορετικά), να υπολογίσετε τη ροή του διανυσματικού πεδίου $\mathbf{F}$ στο τμήμα της σφαίρας $S : x^2 + y^2 + z^2 = 2, z \geq 1$ με θετική όψη την εξωτερική. (1μ)

Θ 4. α) Αν G είναι ένα χωρίο του $\mathbb{R}^3$, όπου εφαρμόζεται το θεώρημα Gauss, $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ μια C^1 -τάξης βαθμωτή συνάρτηση και $\mathbf{F}$ ένα C^1 -τάξης διανυσματικό πεδίο του $\mathbb{R}^3$, να δείξετε:

i) $\operatorname{div}(f\mathbf{F}) = \nabla f \cdot \mathbf{F} + f \operatorname{div} \mathbf{F}$. (0.50μ)

ii) $\iiint_G \nabla f \cdot \mathbf{F} dxdydz = \iint_{\partial G} f \mathbf{F} d\mathbf{S} - \iiint_G (f \operatorname{div} \mathbf{F}) dxdydz$ (0.50μ)

β) Δίνεται το διανυσματικό πεδίο $\mathbf{F} = (2x, y, -3z)$. Δείξτε ότι:

i) Το $\mathbf{F}$ είναι σωληνοειδές. (0.25μ)

ii) Υπάρχει συνάρτηση $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $\mathbf{F} = \nabla f$ (χωρίς να υπολογιστεί η f). (0.25μ)

γ) Με τη βοήθεια του θεωρήματος Gauss και των προηγούμενων ερωτημάτων να υπολογίσετε το επιφανειακό ολοκλήρωμα $\iint_S f \mathbf{F} d\mathbf{S}$, όπου $\mathbf{S}$ η εξωτερική επιφάνεια του κύβου

$$G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}. \quad (1\mu)$$

Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ