A

ΣΕΜΦΕ 3ο Εξάμηνο κανονική εξέταση - Φεβρουάριος 2012 (28–2–12)

Ανάλυση III

Ονοματεπώνυμο ....

Θ Ε Μ Α Τ Α

Θ 1. i) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int_0^1 \left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x} 2(x-y)\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x.$ **(0.6μ)**

ii) Να σχεδιάσετε το χωρίο ολοκλήρωσης και κατόπιν να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα αλλάζοντας τη σειρά ολοκλήρωσης. **(1μ)**

iii) Να επαληθεύσετε το αποτέλεσμα με ένα επικαμπύλιο ολοκλήρωμα (χρησιμοποιώντας το θεώρημα Green), επιλέγοντας κατάλληλο διανυσματικό πεδίο $\mathbf{F}$. **(0.9μ)**

Θ 2. α) i) Να δείξετε ότι αν $\mathbf{F} = \nabla f$, όπου $f(x, y, z)$ μια C^2-τάξης βαθμωτή συνάρτηση, τότε είναι $\mathrm{rot}\mathbf{F} = \mathbf{0}$. **(0.5μ)**

ii) Να υπολογίσετε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\oint_{\mathbf{c}} \mathbf{F}\mathrm{d}\mathbf{r}$, όπου $\mathbf{F} = \nabla(\ln\sqrt{(x-1)^2 + y^2})$ και $\mathbf{c}$ μια απλή, κλειστή, θετικά προσανατολισμένη καμπύλη, η οποία περικλείει το σημείο (1, 0). **(0.7μ)**

β) i) Να ορίσετε πότε ένα χωρίο G του $\mathbb{R}^3$ λέγεται απλώς συνεκτικός τόπος. **(0.5μ)**

ii) Να δείξετε ότι αν το C^1-τάξης διανυσματικό πεδίο $\mathbf{F}$ του $\mathbb{R}^3$ είναι αστρόβιλο (δηλαδή $\mathrm{rot}\mathbf{F} = \mathbf{0}$) σε ένα απλώς συνεκτικό τόπο, τότε το $\mathbf{F}$ είναι συντηρητικό (δηλαδή υπάρχει συνάρτηση $f(x, y, z)$ ώστε $\mathbf{F} = \nabla f$). **(0.8μ)**

Θ 3. Δίνεται το διανυσματικό παδίο $\mathbf{F} = (-y,\, x,\, 1)$.

i) Να δείξετε ότι είναι σωληνοειδές (δηλαδή $\mathrm{div}\mathbf{F} = 0$). **(0.2μ)**

ii) Να βρείτε μια λύση της εξίσωσης $\mathbf{F} = \mathrm{rot}\mathbf{G}$ της μορφής $\mathbf{G} = (A,\, B,\, 0)$. **(1.0μ)**

iii) Αν $\mathbf{G_1} = (3x^2 + xz,\, 3yz + x,\, y^2)$ είναι μια άλλη λύση της εξίσωσης $\mathbf{F} = \mathrm{rot}\mathbf{G}$ να δείξετε ότι υπάρχει συνάρτηση $f(x, y, z)$ τέτοια ώστε $\mathbf{G_1} = \mathbf{G} + \nabla f$, η οποία και να βρεθεί. **(0.8μ)**

iv) Να υπολογιστεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_{\mathbf{c}} (\mathbf{G_1} - \mathbf{G})\, \mathrm{d}\mathbf{r}$, όπου $\mathbf{c}$ η τεθλασμένη γραμμή OAB, με $O(0, 0, 0)$, $A(1, 1, 0)$ και $B(2, 1, 1)$. **(0.5μ)**

Θ 4. α) i) Να διατυπώσετε το θεώρημα Gauss. **(0.5μ)**

ii) Να επαληθευθεί το θεώρημα Gauss για τη συνάρτηση $\mathbf{F} = (3x,\, -2y,\, z)$ και το χωρίο G που φράσσεται από τις επιφάνειες $x^2 + z^2 = 4$, $y = 0$, $y = 2$. **(1.2μ)**

β) Με τη βοήθεια του θεωρήματος Stokes να υπολογίσετε το επιφανειακό ολοκλήρωμα $\iint_{\mathbf{S}} (\nabla \times \mathbf{F})\mathrm{d}\mathbf{S}$, όπου $\mathbf{F} = (3y,\, -xz,\, yz^2)$ και $\mathbf{S} : 2z = x^2 + y^2$, $z \leq 2$ με θετική όψη την άνω ("εσωτερική"), αφού πρώτα σχεδιάσετε την επιφάνεια με προσανατολισμένο το σύνορό της. **(0.8μ)**

Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ