



ΣΕΜΦΕ 3ο Εξάμηνο κανονική εξέταση - Φεβρουάριος 2013 (5-2-13)
Ανάλυση ΙΙΙ

Ονοματεπώνυμο

Θ Ε Μ Α Τ Α

Θ 1. α) Δίνεται το ολοκλήρωμα $I = \int_0^1 \left(\int_y^1 x^3 y e^{xy^2} dx \right) dy$.

i) Να σχεδιάσετε το χωρίο και να δικαιολογήσετε ότι μπορεί να γίνει η αλλαγή σειράς ολοκλήρωσης (Θ. Fubini). (0.4μ)

ii) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα. (1μ)

β) i) Να ορίσετε τις έννοιες «απλώς συνεκτικός» και «πολλαπλώς συνεκτικός» τόπος του $\mathbb{R}^2$ και του $\mathbb{R}^3$. Τί γνωρίζετε για το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα ενός C^1 -τάξης διανυσματικού πεδίου $F = (P, Q)$ του $\mathbb{R}^2$, κατά μήκος μιας απλής κλειστής καμπύλης, σ' ένα πολλαπλώς συνεκτικό τόπο D ; (0.6μ)

ii) Να υπολογίσετε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\oint_c \frac{x^2 y}{(x^2 + y^2)^2} dx + \frac{-x^3}{(x^2 + y^2)^2} dy$, πάνω στην καμπύλη

$c : (x - 1)^2 + y^2 = 4$. (1μ)

Θ 2. α) Να δείξετε, με πλήρη αιτιολόγηση, ότι αν $\mathbf{F} = \nabla f$, όπου $f(x, y, z)$ μια C^2 -τάξης βαθμωτή συνάρτηση, τότε είναι $\text{rot} \mathbf{F} = \mathbf{0}$. (0.5μ)

β) Έστω $\mathbf{F} = (2xy^3 \sin z, 3x^2 y^2 \sin z, x^2 y^3 \cos z)$.

i) Να δείξετε, με πλήρη αιτιολόγηση, ότι υπάρχει συνάρτηση $f(x, y, z)$ τέτοια ώστε $\mathbf{F} = \nabla f$ και να προσδιορίσετε μια τέτοια συνάρτηση f . (1.3μ)

ii) Να υπολογίσετε το έργο, το οποίο παράγεται από την $\mathbf{F}$, όταν κινείται κατά μήκος της καμπύλης $c : z = x^2 + y^2, (x - 1)^2 + y^2 = 1$. (0.7μ)

Θ 3. α) Έστω $\mathbf{F}$ ένα C^1 -τάξης διανυσματικό πεδίο και S μια κλειστή επιφάνεια στο πεδίο ορισμού του $\mathbf{F}$. Να δείξετε ότι ισχύει $\iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) d\mathbf{S} = \mathbf{0}$. (0.5μ)

β) Να επαληθευθεί το θεώρημα Stokes για το διανυσματικό πεδίο $\mathbf{F} = (y, z, x)$ στο παραβολοειδές $z = 1 - x^2 - y^2, z \geq 0$. (2μ)

Θ 4. i) Να διατυπώσετε το θεώρημα Gauss. (0.5μ)

ii) Πότε ένα διανυσματικό πεδίο $\mathbf{F}$ του $\mathbb{R}^3$ λέγεται σωληνοειδές; Να εξετάσετε αν το πεδίο $\mathbf{C} = \text{rot} \mathbf{F}$ είναι σωληνοειδές. (0.5μ)

iii) Με τη βοήθεια του θεωρήματος Gauss να υπολογίσετε το επιφανειακό ολοκλήρωμα $\iint_S \mathbf{F} d\mathbf{S}$, όπου $\mathbf{F} = (2x^2 y, -y^2, 4xz^2)$ και $S : y^2 + z^2 = 9, x = 2, y \geq 0, z \geq 0$. (1μ)

Διάρκεια εξέτασης 2 ώρες και 50'

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ