$\boxed{\text{A}}$

ΣΕΜΦΕ 3ο Εξάμηνο επαναληπτική εξέταση - Οκτώβριος 2011 (24–10–11)
Ανάλυση III

Ονοματεπώνυμο ....

Θ Ε Μ Α Τ Α

Θ 1. Δίνεται το ολοκλήρωμα

$$\iint_D e^{-(2x+y)} \sin(\frac{\pi y}{2x+y}) dxdy, \quad \text{όπου} \quad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2x + y \leq 2,\ x,\ y \geq 0\}.$$

i) Να σχεδιάσετε το χωρίο D. **(0.5μ)**

ii) Χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό $u = 2x + y,\ v = y$, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα, αφού πρώτα σχεδιάσετε το μετασχηματισμένο χωρίο D^*. **(2μ)**

Θ 2. α) i) Να ορίσετε πότε ένα χωρίο του $\mathbb{R}^3$ λέγεται απλώς συνεκτικός τόπος. **(0.4μ)**

ii) Πότε ένα διανυσματικό πεδίο $\mathbf{F}$ του $\mathbb{R}^3$ λέγεται αστρόβιλο; Αν το $\mathbf{F}$ είναι C^1 τάξης, ποια επιπλέον σχέση ικανοποιεί; **(0.6μ)**

iii) Να αποδειχθεί ότι η τιμή του επικαμπυλίου ολοκληρώματος του διανυσματικού πεδίου
$\mathbf{F} = (2xy^2z,\ 2x^2yz,\ x^2y^2)$ στην καμπύλη $c:\ x^2 + y^2 = 2,\ z = 3$,
είναι ανεξάρτητο από τον προσανατολισμό της καμπύλης c. **(1.5μ)**

Θ 3. Να επαληθεύσετε το θεώρημα του Gauss(αποκλίσεως) για τη συνάρτηση $\mathbf{F} = 3x\mathbf{i} - 2y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, στο χωρίο V, το οποίο φράσσεται από τις επιφάνειες $x^2 + z^2 = 4,\ y = 0,\ x + y + z = 3$. **(2,5μ)**

Θ 4. α) Να διατυπώσετε το θεώρημα του Stokes κάνοντας σχετικό γενικό σχήμα στο οποίο να εμφανίζονται όλες οι έννοιες που αναφέρονται στη διατύπωση του θεωρήματος. **(0.7μ)**

β) Δίνεται το διανυσματικό πεδίο $\mathbf{F} = \left(\frac{x(3+x^2)}{1+x^2},\ \frac{2x^2y(3+x^2)}{(1+x^2)^2},\ -3z\right)$.

i) Να δείξετε ότι υπάρχει διανυσματικό πεδίο $\mathbf{G}$, τέτοιο ώστε $\mathbf{F} = \mathbf{rot}\mathbf{G}$. **(0.5μ)**

ii) Έστω S μια λεία επιφάνεια που έχει ως σύνορο την θετικά προσανατολισμένη καμπύλη $c:\ \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1,\ z = 5$. Να υπολογιστεί το επιφανειακό ολοκλήρωμα $I = \iint_{\mathbf{S}} \mathbf{F} d\mathbf{s}$ πάνω στη θετική όψη της S, χρησιμοποιώντας κατάλληλα το θεώρημα του Stokes και το ερώτημα β(i). **(1.3μ)**

Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ