

ΣΕΜΦΕ 3ο Εξάμηνο Επαναληπτική εξέταση - Σεπτέμβριος 2012 (24-9-12, 09.00)
Ανάλυση ΙΙΙ

Ονοματεπώνυμο

Θ Ε Μ Α Τ Α

Θ 1. α) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\iint_D \sin(x^3) dx dy$, όπου

$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{y} \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 9\}$, αφού πρώτα σχεδιάσετε το χωρίο D . **(1.3μ)**

β) Να διατυπώσετε το θεώρημα του Green και με τη βοήθειά του να υπολογίσετε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\oint_{\partial D} \mathbf{F} d\mathbf{r}$, όπου ∂D το θετικά προσανατολισμένο σύνορο του χωρίου D του α) ερωτήματος και $\mathbf{F} = (-y \sin(x^3), -y^2)$. **(1.2μ)**

Θ 2. α) Να διατυπώσετε το θεώρημα του Stokes κάνοντας σχετικό γενικό σχήμα στο οποίο να εμφανίζονται όλες οι έννοιες που αναφέρονται στη διατύπωση του θεωρήματος. **(1.0μ)**

β) Δίνεται το διανυσματικό πεδίο $\mathbf{F} = \left(-\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}, z\right)$, $(x, y, z) \neq (0, 0, z)$, $z \in \mathbb{R}$.

i) Ναδειχθεί ότι $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$. **(0.5μ)**

ii) Να υπολογιστεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα του $\mathbf{F}$ κατά μήκος του κύκλου $\gamma : \mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t, 0)$. **(0.5μ)**

iii) Να σχολιαστούν, σε σχέση με το θεώρημα Stokes, τα αποτελέσματα i) και ii). **(0.5μ)**

Θ 3. Ναδειχθεί ότι το διανυσματικό πεδίο $\mathbf{F} = (x, x, -z)$ είναι σωληνοειδές. **(0.5μ)**

Κατόπιν:

i) Να βρεθεί ένα διανυσματικό πεδίο $\mathbf{G}$ τέτοιο ώστε $\mathbf{F} = \text{rot } \mathbf{G}$. **(1.0μ)**

ii) Έστω $\mathbf{S}$ μια λεία επιφάνεια που έχει ως σύνορο την θετικά προσανατολισμένη καμπύλη $(c) : \frac{y^2}{9} + \frac{x^2}{4} = 1, z = 5$. Να υπολογιστεί το επιφανειακό ολοκλήρωμα $I = \iint_{\mathbf{S}} \mathbf{F} d\mathbf{S}$ πάνω στη θετική όψη της $\mathbf{S}$. **(1.0μ)**

Θ 4. α) Να διατυπώσετε αναλυτικά το θεώρημα Gauss. **(1.0μ)**

β) Με τη βοήθεια του θεωρήματος Gauss (ή διαφορετικά), να υπολογίσετε το επιφανειακό ολοκλήρωμα $\iint_{\mathbf{S}} \mathbf{F} d\mathbf{S}$, όπου $\mathbf{F} = (x, y, z)$ και $\mathbf{S}$ η εξωτερική επιφάνεια του κλειστού χωρίου

$G = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \leq 0\}$. **(1.5μ)**

Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ