

**ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ
ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΗΝ
ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΚΑΙ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ
10-10-2007**

ΘΕΜΑ 1^ο

(α) Να αποδείξετε ότι το πεπερασμένο υποσύνολο $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ενός διανυσματικού χώρου V είναι βάση του, αν, και μόνον αν, κάθε στοιχείο x του V γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός στοιχείων του S .

Μονάδες 1,5

(β) Να αποδείξετε ότι κάθε διανυσματικός χώρος $V \neq \{0\}$ ο οποίος έχει ένα πεπερασμένο σύνολο γεννητόρων $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ έχει και μία βάση.

Μονάδες 1

ΘΕΜΑ 2^ο

(α) Δίνονται επίπεδο $\Pi: 3x - 2y - 3z + 10 = 0$ και η ευθεία

$$\varepsilon: x = 5 + 6t, y = -6 - 4t, z = 3 + 4t, t \in \mathbb{R}.$$

- (i) Να βρεθεί το σημείο τομής της ευθείας ε με το επίπεδο Π .
- (ii) Να βρεθούν οι αναλυτικές εξισώσεις της ευθείας δ που περνάει από το σημείο $M(3, -2, -4)$, είναι παράλληλη προς το επίπεδο Π και τέμνει την ευθεία ε .

Μονάδες 1,5

(β) Τα σημεία A, B, Γ, Δ ως προς δεδομένο σύστημα αναφοράς με αρχή O έχουν διανύσματα θέσης a, b, c, d αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι :

$$A, B, \Gamma, \Delta \text{ είναι συνεπίπεδα, } \Leftrightarrow (a, b, c) - (b, c, d) + (c, d, a) - (d, a, b) = 0$$

Μονάδες 1

ΘΕΜΑ 3^ο

(α) δίνονται οι διανυσματικοί υπόχωροι του $\mathbb{R}^3$

$$V_1 = \{(x, y, z) : x + y + z = 0\} \text{ και } V_2 = [(1, 1, 0), (0, 0, 1)].$$

Να βρείτε τις διαστάσεις και βάσεις των υποχώρων $V_1, V_2, V_1 \cap V_2$ και $V_1 + V_2$.

Μονάδες 1,5

(β) Δίνεται η γραμμική απεικόνιση $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ με τύπο

$$T(x_1, x_2, x_3) = (x_2 + x_3, x_3 + x_1, x_1 + x_2).$$

Να βρεθεί ο πίνακας της T , ως προς τη βάση

$$u = \{u_1 = (1, 1, 1), u_2 = (1, -1, 0), u_3 = (1, 1, -2)\}.$$

Μονάδες 1

Βλέπε και πίσω σελίδα

ΘΕΜΑ 4^ο

(α) Για τις διάφορες τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ να λύσετε το σύστημα

$$\begin{aligned}x - y - z &= 3 \\ 2x - 3y + 4z &= 7 \\ x - y + \alpha z &= \beta.\end{aligned}$$

Μονάδες 1

(β) Δίνεται ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} \beta & \alpha & \alpha & \alpha \\ \alpha & \beta & \alpha & \alpha \\ \alpha & \alpha & \beta & \alpha \\ \alpha & \alpha & \alpha & \beta \end{bmatrix}.$$

Να προσδιορίσετε τις τιμές των α, β για τις οποίες ο A είναι αντιστρέψιμος.

Στην περίπτωση που ο A αντιστρέφεται, να αποδείξετε ότι ο πίνακας A^{-1} είναι της ίδιας μορφής, δηλαδή έχει όλα τα διαγώνια στοιχεία του ίσα και όλα τα μη διαγώνια στοιχεία του επίσης ίσα.

Μονάδες 1,5

Τα θέματα είναι ισοδύναμα

Διάρκεια εξέτασης 2 ώρες και 30 λεπτά

Καλή επιτυχία