Λύσεις των ασκήσεων του Φυλλαδίου 1
Γραμμική Άλγεβρα και Εφαρμογές (Σ.Ε.Μ.Φ.Ε)

1. Είναι:

$$\left.\begin{array}{l}\langle \mathbf{u}+\kappa\mathbf{v}+\lambda\mathbf{w},\,\mathbf{w}\rangle = 0\\ \langle \mathbf{u}+\kappa\mathbf{v}+\lambda\mathbf{w},\,\mathbf{v}\rangle = 0\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\langle \mathbf{u},\,\mathbf{w}\rangle + \kappa\langle \mathbf{v},\mathbf{w}\rangle + \lambda\langle \mathbf{w},\,\mathbf{w}\rangle = 0\\ \langle \mathbf{u},\,\mathbf{v}\rangle + \kappa\langle \mathbf{v},\,\mathbf{v}\rangle + \lambda\langle \mathbf{w},\,\mathbf{v}\rangle = 0\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{rcl}\langle \mathbf{v},\mathbf{w}\rangle\kappa + \|\mathbf{w}\|^2\lambda &=& -\langle \mathbf{u},\,\mathbf{w}\rangle\\ \|\mathbf{v}\|^2\kappa + \langle \mathbf{v},\mathbf{w}\rangle\lambda &=& -\langle \mathbf{u},\,\mathbf{v}\rangle\end{array}\right\} \quad (\Sigma)$$

Το σύστημα (Σ) έχει ορίζουσα

$$D = \begin{vmatrix} \langle \mathbf{v},\mathbf{w}\rangle & \|\mathbf{w}\|^2 \\ \|\mathbf{v}\|^2 & \langle \mathbf{v},\mathbf{w}\rangle \end{vmatrix} = \langle \mathbf{v},\mathbf{w}\rangle^2 - \|\mathbf{v}\|^2\,\|\mathbf{w}\|^2,$$

η οποία είναι διάφορη του μηδενός, διότι τα διανύσματα $\mathbf{v},\mathbf{w}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα (και άρα δεν μπορεί να ισχύει ισότητα στην ανισότητα Cauchy-Schwarz). Το (Σ) είναι Cramer και επομένως έχει μοναδική λύση.

---

2. Κλιμακωτοποιούμε τα a_1, a_2:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -5 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 1 & -5 & 0 \\ 1 & -2 & 6 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 6 & 0 \\ 2 & 1 & -5 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 6 & 0 \\ 0 & 5 & -17 & 0 \end{bmatrix}$$

Επιλέγουμε από την κανονική βάση του $\mathbb{R}^4$ τα διανύσματα $a_3=(0,0,1,0)$ κ' $a_4=(0,0,0,1)$, ώστε τα a_1,a_2,a_3,a_4 να είναι σε κλιμακωτή μορφή, άρα γραμμικώς ανεξάρτητα και επομένως βάση του $\mathbb{R}^4$.

Αν $A=(a_{ij})$ είναι ο πίνακας του κανονικού εσωτ. γινομένου του $\mathbb{R}^4$ ως προς τη βάση $\mathcal{B}=\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$, τότε:

$a_j a_i = a_{ij} = a_i \cdot a_j$. Επομένως

$a_{11} = a_1\cdot a_1 = 30$, $a_{12} = a_1 a_2 = 0$, $a_{13} = a_1 a_3 = -5$, $a_{14} = a_1\cdot a_4 = 0$

$a_{22} = a_2\cdot a_2 = 11$, $a_{23} = a_2\cdot a_3 = 1$, $a_{24} = a_2\cdot a_4 = 0$

$a_{33} = a_3\cdot a_3 = 1$, $a_{34} = a_3\cdot a_4 = 0$

$a_{44} = a_4\cdot a_4 = 1$

οπότε (A συμμετρικός)

i) $$A = \begin{bmatrix} 30 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 11 & 1 & 0 \\ -5 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ii) Εφαρμόζουμε τη μέθοδο Gram-Schmidt

$v_1 = a_1 = (2,1,-5,0)$, $v_2 = a_2 - \frac{a_2 \cdot v_1}{\|v_1\|^2} v_1 = (3,-1,1,0) - \frac{0}{\|v_1\|^2} v_1 = a_2$

$$v_3 = a_3 - \frac{a_3 \cdot v_1}{\|v_1\|^2} v_1 - \frac{a_3 \cdot v_2}{\|v_2\|^2} v_2 = (0,0,1,0) - \frac{-5}{30}(2,1,-5,0) - \frac{1}{11}(3,-1,1,0)$$

$$= \dots = \frac{1}{66}(4,17,5,0).$$

$$v_4 = a_4 - \frac{a_4 \cdot v_1}{\|v_1\|^2} v_1 - \frac{a_4 \cdot v_2}{\|v_2\|^2} v_2 - \frac{a_4 \cdot v_3}{\|v_3\|^2} v_3 = a_4 - \frac{0}{\|v_1\|^2} v_1 - \frac{0}{\|v_2\|^2} v_2 - \frac{0}{\|v_3\|^2} v_3 = a_4$$

Επομένως η $\left\{ u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|},\ u_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|},\ u_3 = \frac{v_3}{\|v_3\|},\ u_4 = \frac{v_4}{\|v_4\|} \right\}$ είναι μια

ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^4$: $\left\{ u_1 = \left(\frac{2}{\sqrt{30}}, \frac{1}{\sqrt{30}}, \frac{-5}{\sqrt{30}}, 0\right), u_2 = \left(\frac{3}{\sqrt{11}}, \frac{-1}{\sqrt{11}}, \frac{1}{\sqrt{11}}, 0\right) \right.$

$\left. u_3 = \left(\frac{4}{5\sqrt{6}}, \frac{17}{5\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, 0\right),\ u_4 = (0,0,0,1) \right\}$.

3. α) Έστω $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{21} \\ b_{12} & b_{22} \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}$. Είναι:

- $f(A+B,C) = tr((A+B)C^T) = tr\left(\begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{11} & c_{21} \\ c_{12} & c_{22} \end{bmatrix} \right)$

$$= tr\left(\begin{bmatrix} (a_{11}+b_{11})c_{11} + (a_{12}+b_{12})c_{12} & * \\ * & (a_{21}+b_{21})c_{21} + (a_{22}+b_{22})c_{22} \end{bmatrix} \right)$$

$$= (a_{11}+b_{11})c_{11} + (a_{12}+b_{12})c_{12} + (a_{21}+b_{21})c_{21} + (a_{22}+b_{22})c_{22} \quad (1)$$

$f(A,C) = tr(AC^T) = a_{11}c_{11} + a_{12}c_{12} + a_{21}c_{21} + a_{22}c_{22}$ (2)

$f(B,C) = tr(BC^T) = b_{11}c_{11} + b_{12}c_{12} + b_{21}c_{21} + b_{22}c_{22}$ (3)

Από (1), (2) & (3) $\Rightarrow$ $f(A+B,C) = f(A,C) + f(B,C)$ δηλαδή η ιδιότητα (i) του εσωτ. γινομένου.

- $f(A,B) = tr(AB^T) = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{12} + a_{21}b_{21} + a_{22}b_{22}$
  $= b_{11}a_{11} + b_{12}a_{12} + b_{21}a_{21} + b_{22}a_{22} = tr(BA^T) = f(B,A)$

- $f(A,A) = tr(AA^T) = tr\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22}\end{bmatrix}\right)$

$$= a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{21}^2 + a_{22}^2 \geq 0 \quad \text{κ'} \quad f(A,A)=0 \Leftrightarrow$$

$$a_{11}=a_{12}=a_{21}=a_{22}=0 \Leftrightarrow A=0.$$

- $f(\lambda A, B) = tr(\lambda AB^T) = \lambda(a_{11}b_{11}+a_{12}b_{12}+a_{21}b_{21}+a_{22}b_{22})$
$$= \lambda\, tr(AB^T) = \lambda f(A,B).$$

Επομένως ικανοποιούνται από τις f όλες οι ιδιότητες του εσωτ. γινομένου και άρα η f είναι ένα εσωτ. γινόμενο στον $\Pi_2(\mathbb{R})$.

b) Παρατηρούμε ότι αν $A \in \Pi_2^{\Sigma}(\mathbb{R}) \Rightarrow A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22}\end{bmatrix} = a_{11}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0\end{bmatrix} +$

$+ a_{12}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0\end{bmatrix} + a_{22}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1\end{bmatrix}$, ώστε οι πίνακες $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1\end{bmatrix}$

παράγουν τον $\Pi_2^{\Sigma}(\mathbb{R})$ και είναι γραμμ. ανεξάρτητοι. Άρα αποτελούν βάση του $\Pi_2(\mathbb{R})$ και άρα $\dim \Pi_2^{\Sigma}(\mathbb{R}) = 3$.

i) Επομένως για να είναι το S βάση του $\Pi_2^{\Sigma}(\mathbb{R})$, αρκεί να είναι γραμμικώς ανεξάρτητο.

Έστω $\lambda_1\eta_1 + \lambda_2\eta_2 + \lambda_3\eta_3 = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} \lambda_1+2\lambda_2+4\lambda_3 & -2\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3 \\ -2\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3 & \lambda_1+3\lambda_2-5\lambda_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0\end{bmatrix} \Leftrightarrow$

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1+2\lambda_2+4\lambda_3 &= 0 \\ -2\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3 &= 0 \\ \lambda_1+3\lambda_2-5\lambda_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow D = -52 \neq 0.$$

Άρα το σύστημα έχει μοναδική λύση τη μηδενική: $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$.

Επομένως S γραμμ. ανεξ. και άρα S βάση του $\Pi_2^{\Sigma}(\mathbb{R})$

ii) Θέτουμε $v_1 = \eta_1 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1\end{bmatrix}$ και

$$v_2 = \eta_2 - \frac{\langle \eta_2, v_1\rangle}{\|v_1\|^2} v_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3\end{bmatrix} - \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19/10 & 12/10 \\ 12/10 & 29/10\end{bmatrix}$$

$$v_3 = \eta_3 - \frac{\langle \eta_3, v_1\rangle}{\|v_1\|^2} - \frac{\langle \eta_3, v_2\rangle}{\|v_2\|^2} v_2 = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & -5\end{bmatrix} - \frac{3}{10}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1\end{bmatrix} - \frac{\frac{-93}{10}}{\frac{1490}{100}}\begin{bmatrix} 19/10 & 12/10 \\ 12/10 & 29/10\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{728}{149} & \frac{52}{149} \\ \frac{52}{149} & -\frac{520}{149}\end{bmatrix}$$

οπότε η αντίστοιχη ορθοκανονική βάση είναι

$$\left\{ u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|},\ u_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|},\ u_3 = \frac{v_3}{\|v_3\|} \right\}$$

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad u_2 = \frac{1}{\sqrt{1490}} \begin{bmatrix} 19 & 12 \\ 12 & 29 \end{bmatrix}$$

$$u_3 = \frac{1}{\sqrt{805792}} \begin{bmatrix} 728 & 52 \\ 52 & -520 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{298}} \begin{bmatrix} 14 & 1 \\ 1 & -10 \end{bmatrix}$$

4. Εύρεση ιδιοτιμών: $|A-\lambda I| = 0 \Rightarrow$

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 4 & 4 \\ 6 & 7-\lambda & 6 \\ -6 & -7 & -6-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 4 & 4 \\ 6 & 7-\lambda & 6 \\ 0 & -\lambda & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \begin{vmatrix} 4-\lambda & 0 & 4 \\ 6 & 1-\lambda & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -\lambda(1-\lambda)(4-\lambda) = 0 \Rightarrow$$

$\lambda_1 = 4,\ \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = 0$

Εύρεση ιδιοδιανυσμάτων:

• $\lambda = 4 \Rightarrow (A-4I)X = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 4 & 4 \\ 6 & 3 & 6 \\ -6 & -7 & -10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \dots$ $x_2 = -x_3$, $x_1 = -\frac{1}{2}x$

$\Rightarrow X = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}x_3 \\ -x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} \Rightarrow X_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$

• $\lambda = 1 \Rightarrow (A-I)X = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 4 & 4 \\ 6 & 6 & 6 \\ -6 & -7 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \dots$ $x_1 = 0$, $x_2 = -x_3$

$\Rightarrow X = \begin{bmatrix} 0 \\ -x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} \Rightarrow X_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

• $\lambda = 0 \Rightarrow AX = 0 \Rightarrow \left.\begin{aligned} 4x_1 + 4x_2 + 4x_3 &= 0 \\ 6x_1 + 7x_2 + 6x_3 &= 0 \\ -6x_1 - 7x_2 - 6x_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \dots$ $x_1 = -x_3$, $x_2 = 0$ $\Rightarrow X = \begin{bmatrix} -x_3 \\ 0 \\ x_3 \end{bmatrix} \Rightarrow$

$X_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Επομένως:

$$\Delta=\begin{bmatrix}4&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix},\quad P=\begin{bmatrix}-1&0&-1\\-2&-1&0\\2&1&1\end{bmatrix},\quad P^{-1}=\begin{bmatrix}-1&-1&-1\\2&1&2\\0&1&1\end{bmatrix}$$

$A=P\Delta P^{-1}=X^2 \Rightarrow X=P\begin{bmatrix}\pm2&0&0\\0&\pm1&0\\0&0&0\end{bmatrix}P^{-1}$ (με όλους τους συνδυασμούς των προσήμων $\pm$) οπότε έχουμε τέσσερις λύσεις:

$$X=P\begin{bmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}P^{-1}=\begin{bmatrix}2&2&2\\2&3&2\\-2&-3&-2\end{bmatrix} \text{ ή } X=P\begin{bmatrix}-2&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}P^{-1}=\begin{bmatrix}-2&-2&-2\\-6&-5&-6\\6&5&6\end{bmatrix}$$

$$\text{ή } X=P\begin{bmatrix}-2&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{bmatrix}P^{-1}=\begin{bmatrix}-2&-2&-2\\-2&-3&-2\\2&3&2\end{bmatrix} \text{ ή } X=P\begin{bmatrix}2&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{bmatrix}P^{-1}=\begin{bmatrix}2&2&2\\6&5&6\\-6&-5&-6\end{bmatrix}$$

5. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A είναι: $-\lambda^3+3\lambda^2+\lambda-3$ με ρίζες $\lambda_1=3$, $\lambda_2=-1$, $\lambda_3=1$ που είναι οι ιδιοτιμές του A. Τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα είναι:

$$X_1=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix},\quad X_2=\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix},\quad X_3=\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}, \text{ οπότε}$$

$$A=P\Delta P^{-1}, \text{ όπου } \Delta=\begin{bmatrix}3&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{bmatrix},\quad P=\begin{bmatrix}1&-1&1\\0&0&-2\\1&1&1\end{bmatrix},\quad P^{-1}=\begin{bmatrix}1/2&1/2&1/2\\-1/2&0&1/2\\0&-1/2&0\end{bmatrix}$$

$$\text{και } A^5=P\Delta^5P^{-1}=P\begin{bmatrix}3^5&0&0\\0&(-1)^5&0\\0&0&1^5\end{bmatrix}P^{-1}=P\begin{bmatrix}243&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{bmatrix}P^{-1}$$

- Από το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A έχουμε:

$A^3-3A^2-A+3I=0 \Rightarrow A^3=3A^2+A-3I \quad (1) \Rightarrow$

$A^4=3A^3+A^2-3A \overset{(1)}{=} 3(3A^2+A-3I)+A^2-3A = 10A^2-9I \Rightarrow$

$A^5=10A^3-9A \overset{(1)}{=} 10(3A^2+A-3I)-9A = 30A^2+A-30I =$

$$=\begin{bmatrix}121&121&122\\0&1&0\\122&121&121\end{bmatrix}.$$

6. Υπολογίζουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A.
Είναι: $|A-\lambda I|=0 \Rightarrow$

$$\begin{vmatrix} -a+11-\lambda & 0 & a-3 \\ -14 & 1-\lambda & 14 \\ -a+3 & 0 & a+5-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -\lambda^3+17\lambda^2-80\lambda+64=0$$

$$\Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=8, \quad \lambda_3=1$$

<u>1ος τρόπος:</u> Για να διαγωνοποιείται ο A πρέπει στη διπλή ιδιοτιμή $\lambda=8$ να αντιστοιχούν δυο γραμμ. ανεξ. ιδιοδιανύσματα.
Έχουμε $(A-8I)X=0 \Rightarrow$

$$\begin{bmatrix} 3-a & 0 & a-3 \\ -14 & -7 & 14 \\ -a+3 & 0 & a-3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} (3-a)x_1+(a-3)x_3&=0 \\ -2x_1-7x_2+2x_3&=0 \quad (\Sigma) \\ (3-a)x_1+(a-3)x_3&=0 \end{aligned}$$

Για να έχει το (Σ) δυο γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις πρέπει $a-3=0 \Rightarrow a=3$. (Ισοδύναμα πρέπει να έχει διπαραμετρική απειρία λύσεων που σημαίνει $\text{βαθ}(A-8I)=1$, από όπου παίρνουμε πάλι $a=3$).

<u>2ος τρόπος.</u> Επειδή το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A είναι $\chi_A(\lambda)=-(\lambda-8)^2(\lambda-1)$, για να διαγωνοποιείται ο A θα πρέπει να έχει ελάχιστο πολυώνυμο $m_A(\lambda)=(\lambda-8)(\lambda-1)$, δηλαδή να ισχύει: $(A-8I)(A-I)=0 \Rightarrow$

$$\begin{bmatrix} 7(3-a) & 0 & -7(3-a) \\ 98+14(3-a)-14(10-a) & 0 & -98-14(-3+a)+14(4+a) \\ 7(3-a) & 0 & -7(3-a) \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow a=3.$$

Για $a=3$ ο πίνακας A γίνεται: $A=\begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ -14 & 1 & 14 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$ με αντίστοιχα, στις ιδιοτιμές $\lambda_1=\lambda_2=8$ & $\lambda_3=1$, ιδιοδιανύσματα

$$X_1=\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad X_2=\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad X_3=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \text{οπότε}$$

$$A = P\Delta P^{-1} \quad , \text{όπου} \quad \Delta = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} , \; P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} , \; P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$X^3 = A = P\Delta P^{-1} \quad \Rightarrow \quad X = P \begin{bmatrix} 8^{1/3} & 0 & 0 \\ 0 & 8^{1/3} & 0 \\ 0 & 0 & 1^{1/3} \end{bmatrix} P^{-1} = P \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} P^{-1} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$