Λύσεις των ασκήσεων του Φυλλαδίου 2
Γραμμική Άλγεβρα και Εφαρμογές (Σ.Ε.Μ.Φ.Ε)

1. **(i)** Είναι

$$\left.\begin{array}{l} V_1 \subseteq V_1 + V_2 \\ V_2 \subseteq V_1 + V_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} (V_1 + V_2)^\perp \subseteq V_1^\perp \\ (V_1 + V_2)^\perp \subseteq V_1^\perp \end{array}\right\} \Rightarrow (V_1 + V_2)^\perp \subseteq V_1^\perp \cap V_2^\perp \quad (1)$$

Αντιστρόφως, αν $x \in V_1^\perp \cap V_2^\perp \Rightarrow x \in V_1^\perp,\ x \in V_2^\perp \Rightarrow x \perp V_1,\ x \perp V_2 \Rightarrow x \perp (V_1 + V_2) \Rightarrow x \in (V_1 + V_2)^\perp$ και άρα $V_1^\perp \cap V_2^\perp \subseteq (V_1 + V_2)^\perp$ (2).
Απ·ο (1),(2) έπεται $(V_1 + V_2)^\perp = V_1^\perp \cap V_2^\perp$.

(ii) Θέτοντας στην (i) τα $V_1^\perp$, $V_2^\perp$ στη θέση των V_1, V_2 αντίστοιχα έχουμε:
$(V_1^\perp + V_2^\perp)^\perp = V_1^{\perp\perp} \cap V_2^{\perp\perp} = V_1 \cap V_2 \Rightarrow (V_1^\perp + V_2^\perp)^{\perp\perp} = (V_1 \cap V_2)^\perp \Rightarrow V_1^\perp + V_2^\perp = (V_1 \cap V_2)^\perp$.

2. Έστω $\mathbf{u} = \{u_1,\ u_2,\ u_3\}$ η ορθοκανονική βάση ως προς την οποία είναι γραμμένα τα $\varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \varepsilon_3$ είναι:

$$\left.\begin{array}{rcl} \varepsilon_1 &=& u_1 + 2u_2 + u_3 \\ \varepsilon_2 &=& u_1 + u_2 + 2u_3 \\ \varepsilon_3 &=& u_1 + u_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{rcl} u_1 &=& -\varepsilon_1 + \frac{1}{2}\varepsilon_2 + \frac{3}{2}\varepsilon_3 \\ u_2 &=& -\varepsilon_1 - \frac{1}{2}\varepsilon_2 - \frac{1}{2}\varepsilon_3 \\ u_3 &=& \frac{1}{2}\varepsilon_2 - \frac{1}{2}\varepsilon_3 \end{array}\right\},$$

οπότε ο πίνακας αλλαγής βάσης από την $\boldsymbol{\varepsilon}$ στην $\mathbf{u}$ είναι ο $P = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$ με αντίστροφο τον $P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ (που είναι ο πίνακας αλλαγής βάσης από την $\mathbf{u}$ στην $\boldsymbol{\varepsilon}$). Άρα ο πίνακας του T ως προς την $\mathbf{u}$ είναι ο $[T]_u = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 7 \\ 6 & -4 & 6 \\ 6 & -5 & 5 \end{bmatrix}$, οπότε ο πίνακας του T^* ως προς την $\mathbf{u}$ είναι ο $[T^*]_u = [T]_u^\top = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 6 \\ -3 & -4 & -5 \\ 7 & 6 & 5 \end{bmatrix}$. Επομένως ο πίνακας του T^* ως προς την $\boldsymbol{\varepsilon}$ θα είναι ο $[T^*]_{\boldsymbol{\varepsilon}} = P[T^*]_u P^{-1} = \begin{bmatrix} -36 & -37 & -15 \\ 30 & 30 & 14 \\ 26 & 27 & 9 \end{bmatrix}$.

3. **(i)** Έστω $y \in T^*(M^\perp)$. τότε υπάρχει $x \in M^\perp$ τέτοιο ώστε $y = T^*x$. Για $z \in M$ είναι $\langle y,\ z\rangle = \langle T^*x,\ z\rangle = \langle x,\ Tz\rangle = 0$ διότι $Tz \in M$ (αφού από υπόθεση είναι $T(M) \subseteq M$). Επομένως $y \perp M \Rightarrow y \in M^\perp \Rightarrow T^*(M^\perp) \subseteq M^\perp$.

(ii) Θεωρούμε τον πίνακα $A^\top$, ο οποίος έχει ιδιοδιάνυσμα το $(3,\ -3,\ 1)$ και άρα αναλλοίωτο υπόχωρο τον ιδιόχωρο $M = [(3,\ -3,\ 1)]$, οπότε, σύμφωνα με το **(i)**, ο A θα έχει αναλλοίωτο υπόχωρο τον $M^\perp = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ 3x - 3y + z = 0\}$, δηλαδή το επίπεδο (π) με εξίσωση

$3x - 3y + z = 0$.

4. **(i)** Για κάθε $x, y \in V$ είναι
$\langle T^{**}x, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle = \langle Tx, y\rangle \Rightarrow \langle T^{**}x - Tx,\, y\rangle = 0$ για κάθε $y \in V \Rightarrow T^{**}x - Tx = 0$ για κάθε $x \in V \Rightarrow T^{**} = T$.

(ii) Για κάθε $x, y \in V$ είναι $\langle (TS)^*x,\, y\rangle = \langle x,\, (TS)y\rangle = \langle T^*x,\, Sy\rangle = \langle S^*T^*x,\, y\rangle \Rightarrow (TS)^* = S^*T^*$.

(iii) Προφανώς $\mathcal{N}(T) \subseteq \mathcal{N}(T^*T)$ (1). Έστω $x \in \mathcal{N}(T^*T) \Rightarrow T^*Tx = 0 \Rightarrow \langle T^*Tx,\, x\rangle = 0 \Rightarrow \langle Tx,\, Tx\rangle = 0 \Rightarrow \|Tx\|^2 = 0 \Rightarrow Tx = 0 \Rightarrow x \in \mathcal{N}(T) \Rightarrow \mathcal{N}(T^*T) \subseteq \mathcal{N}(T)$ (2). Από (1),(2) προκύπτει το ζητούμενο.

(iv) Έστω $y \in \mathcal{R}(T^*)^\perp \Rightarrow y \perp T^*x$ για κάθε $x \in V \Rightarrow 0 = \langle y,\, T^*x\rangle = \langle Ty,\, x\rangle$ για κάθε $x \in V \Rightarrow Ty = 0 \Rightarrow y \in \mathcal{N}(T) \Rightarrow \mathcal{R}(T^*)^\perp \subseteq \mathcal{N}(T)$ (3). Για κάθε $x \in \mathcal{N}(T)$ είναι $Tx = 0$, οπότε για κάθε $y \in V \Rightarrow 0 = \langle Tx,\, y\rangle = \langle x,\, T^*y\rangle \Rightarrow x \perp \mathcal{R}(T^*) \Rightarrow x \in \mathcal{R}(T^*)^\perp \Rightarrow \mathcal{N}(T) \subseteq \mathcal{R}(T^*)^\perp$ (4). Από (3),(4) προκύπτει $\mathcal{R}(T^*)^\perp = \mathcal{N}(T)$.

(v) Παίρνοντας ορθογώνια συμπληρώματα στην **(iv)** έχουμε: $\mathcal{R}(T^*)^{\perp\perp} = \mathcal{N}(T)^\perp \Rightarrow \mathcal{R}(T^*) = \mathcal{N}(T)^\perp$.

5. $$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & \frac{-i}{\sqrt{2}} & -1 \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & -\lambda & \frac{i}{\sqrt{2}} \\ 1 & \frac{-i}{\sqrt{2}} & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \cdots (2-\lambda)(\lambda-1)(\lambda+1) = 0 \Rightarrow$$
$\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = -1$.

• $\lambda = 2$: $$(A - 2I)X = \mathbb{O} \Rightarrow \left.\begin{aligned} -x_1 - \tfrac{i}{\sqrt{2}}x_2 - x_3 &= 0 \\ \tfrac{i}{\sqrt{2}}x_1 - 2x_2 + \tfrac{i}{\sqrt{2}}x_3 &= 0 \\ -x_1 - \tfrac{i}{\sqrt{2}}x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} -x_1 + \tfrac{i}{\sqrt{2}}x_2 + x_3 &= 0 \\ -x_1 - 2i\sqrt{2}x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$
$$\left.\begin{aligned} x_2 &= 0 \\ x_1 &= -x_3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow X = \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \\ -x_1 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

• $\lambda = 1$: $$(A - I)X = \mathbb{O} \Rightarrow \left.\begin{aligned} -\tfrac{i}{\sqrt{2}}x_2 - x_3 &= 0 \\ \tfrac{i}{\sqrt{2}}x_1 - x_2 + \tfrac{i}{\sqrt{2}}x_3 &= 0 \\ -x_1 - \tfrac{i}{\sqrt{2}}x_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x_3 &= -\tfrac{i}{\sqrt{2}}x_2 \\ x_1 &= -\tfrac{i}{\sqrt{2}}x_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow X =$$
$$\begin{bmatrix} -\frac{i}{\sqrt{2}}x_2 \\ x_2 \\ -\frac{i}{\sqrt{2}}x_2 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} -\frac{i}{\sqrt{2}} \\ 1 \\ -\frac{i}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \Rightarrow X_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ i\sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

• $\lambda = -1$: $$(A + I)X = \mathbb{O} \Rightarrow \left.\begin{aligned} 2x_1 - \tfrac{i}{\sqrt{2}}x_2 - x_3 &= 0 \\ \tfrac{i}{\sqrt{2}}x_1 + x_2 + \tfrac{i}{\sqrt{2}}x_3 &= 0 \\ -x_1 - \tfrac{i}{\sqrt{2}}x_2 + 2x_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} 3x_1 - 3x_3 &= 0 \\ 2\tfrac{i}{\sqrt{2}}x_1 + x_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$
$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x_3 \\ x_2 &= -i\sqrt{2}x_1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow X = \begin{bmatrix} x_1 \\ -i\sqrt{2}x_1 \\ x_1 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -i\sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow X_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -i\sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}.$$ Επειδή οι

ιδιοτιμές είναι διαφορετικές τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα θα είναι κάθετα μεταξύ τους. Επομένως μόνο τα κανονικοποιούμε: $\widetilde{X_1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$, $\widetilde{X_2} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ i\sqrt{2}/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$, $\widetilde{X_3} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ -i\sqrt{2}/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$,

οπότε έχουμε: $Q = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/2 & 1/2 \\ 0 & i\sqrt{2}/2 & -i\sqrt{2}/2 \\ -1/\sqrt{2} & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$, $\Delta = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

6. Αφού ο πίνακας A είναι πραγματικός συμμετρικός με αρνητικές όλες τις ιδιοτιμές του, θα υπάρχει πραγματικός ορθογώνιος πίνακας U ($U \cdot U^T = U^T \cdot U = I$) τέτοιος ώστε

$$A = U \cdot D \cdot U^T = U \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_\nu \end{bmatrix} \cdot U^T = U \cdot \begin{bmatrix} -|\lambda_1| & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -|\lambda_2| & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -|\lambda_\nu| \end{bmatrix} \cdot U^T =$$

$$= -U \cdot \begin{bmatrix} \sqrt{|\lambda_1|} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{|\lambda_2|} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sqrt{|\lambda_\nu|} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sqrt{|\lambda_1|} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{|\lambda_2|} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sqrt{|\lambda_\nu|} \end{bmatrix} \cdot U^T =$$

$$= -\left(U \cdot \begin{bmatrix} \sqrt{|\lambda_1|} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{|\lambda_2|} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sqrt{|\lambda_\nu|} \end{bmatrix} \right) \cdot \left(U \cdot \begin{bmatrix} \sqrt{|\lambda_1|} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{|\lambda_2|} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sqrt{|\lambda_\nu|} \end{bmatrix} \right)^T$$

$= -M \cdot M^T$,

όπου ο πίνακας $M = U \cdot diag\left\{\sqrt{|\lambda_1|}, \sqrt{|\lambda_2|}, \ldots, \sqrt{|\lambda_\nu|}\right\}$ είναι προφανώς αντιστρέψιμος.

7. Αρχικά υπολογίζουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο

$$\chi_A(\lambda) = |I\lambda - A| = \begin{vmatrix} \lambda+1 & -a+4 & -4+a \\ 3 & \lambda-1+a & -1-a \\ 3 & 2 & \lambda-4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda+1 & -a+4 & 0 \\ 3 & \lambda-1+a & \lambda-2 \\ 3 & 2 & \lambda-2 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-2) \begin{vmatrix} \lambda+1 & -a+4 & 0 \\ 3 & \lambda-1+a & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (\lambda-2) \begin{vmatrix} \lambda+1 & -a+4 & 0 \\ 0 & \lambda-3+a & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-2)(\lambda-(3-a))(\lambda+1).$$

Άρα έχουμε τις ιδιοτιμές $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 2$ και $\lambda_3 = 3-a$. Προκειμένου να μην διαγωνοποιείται ο πίνακας A αρκεί να εξετάσουμε τις δύο περιπτώσεις $3-a = -1 \Leftrightarrow \alpha = 4$ και $3-a = 2 \Leftrightarrow \alpha = 1$. Για $\alpha = 4$, έχουμε $\chi_A(\lambda) = (\lambda-2)(\lambda+1)^2$ και (προκειμένου να μην διαγωνοποιείται ο πίνακας A) θα θέλαμε το ελάχιστο πολυώνυμο να είναι $m_A(\lambda) = (\lambda-2)(\lambda+1)^2$ ή ισοδύναμα, να ισχύει

$\left(\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -3 & -3 & 5 \\ -3 & -2 & 4 \end{bmatrix} - 2I\right)\left(\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -3 & -3 & 5 \\ -3 & -2 & 4 \end{bmatrix} + I\right) \neq \mathbb{O}$ το οποίο επαληθεύεται με απλές πράξεις ότι **δεν** ισχύει.

Για $\alpha = 1$, έχουμε $\chi_A(\lambda) = (\lambda - 2)^2(\lambda + 1)$ και (προκειμένου να μην διαγωνοποιείται ο πίνακας A) θα θέλαμε το ελάχιστο πολυώνυμο να είναι $m_A(\lambda) = (\lambda - 2)^2(\lambda + 1)$ ή ισοδύναμα να ισχύει

$\left(\begin{bmatrix} -1 & -3 & 3 \\ -3 & 0 & 2 \\ -3 & -2 & 4 \end{bmatrix} - 2I\right)\left(\begin{bmatrix} -1 & -3 & 3 \\ -3 & 0 & 2 \\ -3 & -2 & 4 \end{bmatrix} + I\right) \neq \mathbb{O}$ το οποίο επαληθεύεται με απλές πράξεις ότι ισχύει. Άρα ο πίνακας A δεν διαγωνοποιείται μόνο για την τιμή $\alpha = 1$.

Για την τιμή αυτή, κατασκευάζουμε στη συνέχεια την κανονική μορφή Jordan του A και τον αντίστοιχο πίνακα ομοιότητας. Έχουμε τον πίνακα $A = \begin{bmatrix} -1 & -3 & 3 \\ -3 & 0 & 2 \\ -3 & -2 & 4 \end{bmatrix}$ με ιδιοτιμές $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ (διπλή) και $\lambda_3 = -1$ (απλή).

Για $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$, $(A - 2I)X = \mathbb{O} \Rightarrow \begin{bmatrix} -3 & -3 & 3 \\ -3 & -2 & 2 \\ -3 & -2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -x - y + z = 0 \\ -\frac{3}{2}x - y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow$ $\begin{cases} x = 0 \\ y = z \end{cases}$ και επιλέγουμε ως ιδιοδιάνυσμα το $x_1 = [0,\ 1,\ 1]^T$. Για να βρούμε το ένα γενικευμένο ιδιοδιάνυσμα που χρειαζόμαστε, λύνουμε το σύστημα $(A - 2I)X = x_1 \Rightarrow \begin{bmatrix} -3 & -3 & 3 \\ -3 & -2 & 2 \\ -3 & -2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} =$ $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -x - y + z = 0 \\ -\frac{3}{2}x - y + z = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -1/3 \\ z = -4/3 \end{cases}$. Επομένως, το γενικευμένο ιδιοδιάνυσμα είναι $\hat{x}_2 = [-1,\ -1/3,\ -4/3]^T$. Για $\lambda_3 = -1$, $(A + I)X = \mathbb{O} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & -3 & 3 \\ -3 & 1 & 2 \\ -3 & -2 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} =$ $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} y = z \\ -3x + 3y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = y = z$ και επιλέγουμε ως ιδιοδιάνυσμα το $x_3 = [1,\ 1,\ 1]^T$.

Τελικά η κανονική μορφή Jordan του πίνακα A είναι $A = \begin{bmatrix} -1 & -3 & 3 \\ -3 & 0 & 2 \\ -3 & -2 & 4 \end{bmatrix} = M \cdot J_A \cdot M^{-1} =$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1/3 & 1 \\ 1 & -4/3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1/3 & 1 \\ 1 & -4/3 & 1 \end{bmatrix}^{-1}.$$