

# ΛΥΣΕΙΣ ΦΥΛΛΑΔΙΟΥ Ι

## Χώροι με εσωτερικό γινόμενο - Ξώροι Hilbert

8<sup>ο</sup> Εξάμηνο ΣΕΜΦΕ 2012

**Άσκηση 0.1.** Θεωρούμε την ακολουθία συναρτήσεων  $(x_n) : x_n(t) = \frac{1}{n}t^n$ . Είναι

$$\|x_n\|_\infty = \sup\{|\frac{1}{n}t^n| : t \in [0, 1]\} = \frac{1}{n} \rightarrow 0$$

ενώ  $F(x_n(t)) = x'_n(1) = 1 \rightarrow 1 \neq 0 = F(0) \Rightarrow F$  ασυνεχής.

**Άσκηση 0.2.** Είναι  $|f(x)| = |\int_0^1 tx(t)dt| \leq \int_0^1 t|x(t)|dt \leq \|x\|_\infty \int_0^1 tdt = \frac{1}{2}\|x\|_\infty$ . Άρα  $\sup\{|f(x)| : \|x\|_\infty \leq 1\} \leq \frac{1}{2}$  και επειδή  $|f(1)| = \int_0^1 tdt = \frac{1}{2}$ , είναι  $\|f\| = \frac{1}{2} = |f(1)|$ .

**Άσκηση 0.3.** Είναι:

$$(Fg)(T) = \int_0^T e^{-T-s}g(s)ds = e^{-T} \int_0^T e^sg(s)ds = e^{-T}\langle f, g \rangle,$$

όπου  $f(t) = e^t$  και  $g$  πραγματική, διότι από ανισότητα Cauchy-Schwarz  $|Fg)(T)| = e^{-T}|\langle f, g \rangle| \leq \|f\| \|g\|$  η ισότητα ισχύει αν  $g = cf$ ,  $c$  σταθερά. Όμως  $\|g\| = 1$ , οπότε

$$1 = \int_0^T c^2|f(t)|^2dt = \int_0^T c^2e^{2t}dt = (1/2)c^2(e^{2T} - 1) \Rightarrow c = \sqrt{\frac{2}{e^{2T} - 1}}.$$

Άρα  $g(t) = \sqrt{\frac{2}{e^{2T}-1}}e^t$ ,  $t \in [0, T]$  με

$$(Fg)(T) = e^{-T} \int_0^T e^s \sqrt{\frac{2}{e^{2T}-1}}e^sds = \dots = e^{-T} \sqrt{\frac{e^{2T}-1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}(1-e^{-2T})}.$$

**Άσκηση 0.4.** Έστω  $x_0 \in X$ , τέτοιο ώστε  $f(x_0) \neq 0$  και  $M = [x_0]$ . Για κάθε  $x \in X$ , θέτουμε  $z = x - \frac{f(x)}{f(x_0)}x_0$ , οπότε  $z \in \ker f$  και  $x = z + \frac{f(x)}{f(x_0)}x_0 \in \ker f + M$ . Επιπλέον  $\ker f \cap M = \{0\}$ , οπότε στην πραγματικότητα είναι ευθύ αλγεβρικό άθροισμα  $X = \ker f \dot{+} M$ . Έστω  $N$  υπόχωρος του  $X$  τέτοιος ώστε  $\ker f \subsetneq N$ . Θεωρούμε  $x_0 \in N \setminus \ker f$ . Τότε  $X = \ker f + [x_0] \subseteq \ker f + N = N \Rightarrow X = N$ , αφού  $\ker f \subseteq N$ .

**Άσκηση 0.5.** Επειδή  $M = [z]^\perp$  είναι κλειστός υπόχωρος του  $X$ , αν  $M = X$  τότε  $X^\perp = H^\perp = \{0\} = M^\perp = [z]$ , άτοπο διότι  $z \neq 0$ . Άρα  $M \subsetneq X$ . Έστω τώρα  $x_0 \in X \setminus M$  και ότι υπάρχει  $y_0 \in M$  τέτοιο ώστε  $\|x_0 - y_0\| = D(x_0, M)$ . Τότε  $(x_0 - y_0) \perp M = [z]^\perp$ , οπότε  $x_0 - y_0 = cz$ . Όμως  $x_0 - y_0 \in X$ , ενώ  $z \notin X$ , άτοπο.

**Άσκηση 0.6.** (i) Σε κάθε  $p(t) = \sum_{k=0}^n a_k t^k$  αντιστοιχεί η πεπερασμένη ακολουθία  $(a_0, a_1, \dots, a_n, 0, 0, \dots)$  στοιχείο του  $c_0$  και αντιστρόφως. Άρα  $X \cong c_0$  και  $\overline{X} = \overline{c_0} = \ell_2$ .

Από τον ορισμό του  $M$  (και έχοντας υπόψη την άσκηση 0.5), αν  $z = \{(k+1)^{-2} : k \in \mathbb{N}\} \in \ell_2$ , τότε  $M = [z]^\perp$ .

(ii) Προφανώς η  $f$  είναι γραμμική,  $f \neq 0$  (π.χ αν  $p(t) = t^n + t^{n-1} + \dots + t + 1$  τότε  $f(p) = \sum_{k=0}^n (k+1)^{-2} \neq 0$ ),

$$|f(p)|^2 = \left| \sum_{k=0}^n (k+1)^{-2} |a_k| \right|^2 \leq \left( \sum_{k=0}^n (k+1)^{-4} \right) \sum_{k=0}^n |a_k|^2 = \left( \sum_{k=0}^n (k+1)^{-4} \right) \|p\|^2,$$

άρα  $f$  φραγμένο.

(iii) Είναι  $M = \ker f$ , άρα  $M$  κλειστός. Από άσκηση 0.4, ο  $M$  έχει συνδιάσταση 1.

(iv) Έστω ότι για  $x_0 \in X \setminus M$ , υπάρχει  $p_0 \in M$  τέτοιο ώστε  $\|x_0 - p_0\| = d(x_0, M) > 0$ . Θεωρούμε  $z_0 = x_0 - p_0 = c_0 + c_1 t + \dots + c_m t^m$ . Τότε  $z_0 \perp M$ . Για  $0 \leq k \leq m$ , έστω  $w_k(t) = (k+1)^2 t^k - (m+2)^2 t^{m+1}$ . Τότε  $f(w_k(t)) = 0$ , οπότε  $w_k(t) \in M$  για κάθε  $k = 1, 2, \dots, m$ . Επομένως  $w_k(t) \perp z_0$  για κάθε  $k = 1, 2, \dots, m$ . Όμως  $w_k(t) \perp z_0 \Rightarrow 0 = \langle z_0, w_k \rangle = c_k (k+1)^2 \Rightarrow c_k = 0$  για κάθε  $k = 1, 2, \dots, m$ . Άρα  $z_0 = 0$ , άτοπο.

**Άσκηση 0.7.** Είναι:  $\|x_n\| \rightarrow \|x\| \Leftrightarrow \langle x_n, x_n \rangle \rightarrow \langle x, x \rangle$ . Επομένως, από  $\langle x_n, x \rangle \rightarrow \langle x, x \rangle$  και το προηγούμενο έχουμε:  $\langle x_n, x_n - x \rangle \rightarrow 0 \Rightarrow \langle x_n - x + x, x_n - x \rangle \rightarrow 0 \Rightarrow \langle x_n - x, x_n - x \rangle - \langle x, x_n - x \rangle \rightarrow 0$ . Όμως  $\langle x, x_n - x \rangle = \langle x, x_n \rangle - \langle x, x \rangle \rightarrow 0$ , οπότε είναι  $\langle x_n - x, x_n - x \rangle \rightarrow 0 \Rightarrow \|x_n - x\| \rightarrow 0 \Rightarrow x_n \rightarrow x$ .

**Άσκηση 0.8.** Οι ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου αποδεικνύονται εύκολα, αν βρεθεί η αντιστοίχιση, από το θεώρημα Riesz, στα γραμμικά συναρτησοειδή  $f + g$ ,  $\lambda f$ , όπου  $\lambda \in \mathbb{C}$ .

Αν  $w$  αντιστοιχεί στο  $f + g$  και  $s$  στο  $\lambda f$ , τότε για κάθε  $z \in H$  είναι:  $(f + g)(z) = f(z) + g(z) \Leftrightarrow \langle z, w \rangle = \langle z, x \rangle + \langle z, y \rangle \Leftrightarrow \dots w = x + y$  και  $(\lambda f)(z) = \langle z, s \rangle \Leftrightarrow \lambda \langle z, x \rangle = \langle z, s \rangle \Leftrightarrow \langle z, \bar{\lambda} x \rangle = \langle z, s \rangle \Leftrightarrow s = \bar{\lambda} x$

Έτσι για παράδειγμα  $(\lambda f, g) = \langle y, \bar{\lambda} x \rangle = \lambda \langle y, x \rangle = \lambda (f, g)$ , κ.λ.π.

Τέλος  $H^*$  και  $H$  είναι ισομετρικά ισόμορφοι, αν ο ισομορφισμός  $f \rightarrow x$  είναι ισομετρικός. Είναι  $\|f\|_{(\cdot, \cdot)}^2 = (f, f) = \langle x, x \rangle = \|x\|^2$ .

**Άσκηση 0.9.** Επειδή  $f \neq 0$  υπάρχει  $z \in (\ker f)^\perp$  τέτοιο ώστε  $f(z) \neq 0$ . Έστω  $x \in X$ . Θεωρούμε  $z_0 = \frac{z}{f(z)}$  και  $\alpha = f(x)$ . Τότε είναι  $x = \alpha z_0 + y$ , όπου  $y = x - \alpha z_0$ , με  $y \in \ker f$ , αφού  $f(y) = f(x) - \alpha f(z_0) = \alpha - \alpha = 0$ .

**Άσκηση 0.10.** Έστω  $z_n = x_n + y_n$  βασική ακολουθία στοιχείων του  $M + N$ , τέτοια ώστε:  $z_n \rightarrow z$ . Είναι  $x_n \in M$  και  $y_n \in N$  για κάθε  $n \in \mathbb{N}$ . Από Πυθαγόρειο θεώρημα, θα έχουμε:

$$\|z_n - z_m\|^2 = \|x_n - x_m\|^2 + \|y_n - y_m\|^2.$$

Επομένως  $\|x_n - x_m\|, \|y_n - y_m\| \leq \|z_n - z_m\|$ . Άρα οι ακολουθίες  $(x_n), (y_n)$  είναι επίσης βασικές και άρα συγκλίνουν αντίστοιχα έστω, σε  $x, y$ . Επειδή  $M, N$  κλειστοί θα είναι:  $x \in M, y \in N$ . Έτσι  $z_n \rightarrow z = \lim(x_n + y_n) = x + y \in M + N$ . Άρα  $M + N$  κλειστός υπόχωρος.