ΛΥΣΕΙΣ ΦΥΛΛΑΔΙΟΥ II-Φραγμένοι Τελεστές
$8^{\text{ο}}$ Εξάμηνο ΣΕΜΦΕ

Άσκηση 0.1. Με επαγωγή προκύπτει ότι ο T_a^n είναι διαγώνιος τελεστής για κάθε $n \in \mathbb{N}$ με αντίστοιχη ακολουθία (a_k^n), $k \in \mathbb{N}$. Είναι $T_a^n x = (a_1^n x_1, a_2^n x_2, ...)$, οπότε $\|T_a^n\| = \sup\limits_k |a_k|^n = \|a\|_\infty^n$ (βλέπε άσκηση 2.1 βιβλίου). Επομένως $\lim\limits_n \|T_a^n\| = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_n \|a\|_\infty^n = 0 \Leftrightarrow \lim \|a\|_\infty < 1$.

Άσκηση 0.2. (i)$\Leftrightarrow$(ii)). Επειδή $(T^n)^* = (T^*)^n$ με επαγωγή δείχνεται ότι $TT^* = T^*T \Leftrightarrow T^n(T^n)^* = (T^n)^*T^n$, δηλαδή T^n φυσιολογικός για κάθε $n \in \mathbb{N}$, αν και μόνο αν, T φυσιολογικός.
(ii)$\Leftrightarrow$(iii)). Άμεση συνέπεια της άσκησης 2.6(ii) του βιβλίου.

Άσκηση 0.3. (i)$\Rightarrow$(ii)). $PQ = P \Rightarrow (PQ)^* = P^* \Rightarrow QP = P$. Πολλαπλασιάζουμε την τελευταία σχέση από δεξιά με Q, οπότε προκύπτει η (ii): $QPQ = PQ = P$.
(ii)$\Rightarrow$(iii)). Από πρόταση 2.11.7(3), ο $Q - P$ είναι ορθή προβολή, αν και μόνο αν, $\mathcal{R}(P) \subseteq \mathcal{R}(Q)$.
Έστω $y \in \mathcal{R}(P)$ Τότε $y = Py \overset{(ii)}{=} Q(QPy) \in \mathcal{R}(Q) \Rightarrow \mathcal{R}(P) \subseteq \mathcal{R}(Q)$.
(iii)$\Rightarrow$(i)). $\mathcal{R}(P) \subseteq \mathcal{R}(Q) \Rightarrow QP = P \Rightarrow PQ = P$.

Άσκηση 0.4. Έστω $L_n \overset{WOT}{\to} L$, και $L_n \in \{T\}'$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Τότε για $x, y \in H$ είναι:

$$\langle LTx, y\rangle = \lim_n \langle TL_n x, y\rangle = \lim_n \langle L_n Tx, y\rangle = \langle TLx, y\rangle \Rightarrow LT = TL \Rightarrow L \in \{T\}'.$$

Άσκηση 0.5. **(i)** Από $\|T_n^* - T^*\| = \|(T_n - T)^*\| = \|T_n - T\|$ έχουμε: $\lim\limits_n \|T_n^* - T^*\| = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_n \|T_n - T\| = 0$.
(ii) Όμοια $\langle (T_n^* - T^*)x, y\rangle = \langle (T_n - T)^* x, y\rangle = \langle x, (T_n - T)y\rangle = \overline{\langle (T_n - T)x, y\rangle}$, οπότε $\lim\limits_n \langle (T_n^* - T^*)x, y\rangle = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_n \langle (T_n - T)x, y\rangle$.

Άσκηση 0.6. **(i)** Έστω $H = M \oplus M^\perp$. Τότε κάθε $x \in H$ γράφεται μοναδικά ως $x = x_1 + x_2$, $x_1 \in M$, $x_2 \in M^\perp$. Επίσης $Tx = Tx_1 + Tx_2$ και τα Tx_1, Tx_2 γράφονται μοναδικά ως: $Tx_1 = x_{11} + x_{12}$, $Tx_2 = x_{21} + x_{22}$, με $x_{11}, x_{21} \in M$ και $x_{12}, x_{22} \in M^\perp$, οπότε $Tx = (x_{11} + x_{21}) + (x_{12} + x_{22})$ με $(x_{11} + x_{21}) \in M)$, $(x_{12} + x_{22}) \in M^\perp$. Ορίζουμε τους τελεστές

$$\begin{array}{ll} A : M \to M & Ax_1 = x_{11} \\ B : M^\perp \to M & Bx_2 = x_{21} \\ C : M \to M^\perp & Cx_1 = x_{12} \\ D : M^\perp \to M^\perp & Dx_2 = x_{22} \end{array}$$

οι οποίοι είναι καλά ορισμένοι και ισχύει $T = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$. Πράγματι

$$Tx = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Ax_1 + Bx_2 \\ Cx_1 + Dx_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11} + x_{21} \\ x_{12} + x_{22} \end{bmatrix}.$$

(ii) Επειδή $Px = P(x_1 + x_2) = Px_1 = x_1$ για κάθε $x \in H$, από (i), είναι: $B = C = D = 0$ και $A = I_M$.
(iii) Εφαρμόστε την άσκηση 2.16(i) του βιβλίου ή διαφορετικά για $x \in M$, από $Tx \in M$, έπεται

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Ax \\ Cx \end{bmatrix} \in M \Rightarrow Cx = 0 \Rightarrow C = 0.$$

(Άλλωστε $C : M \to M^\perp$ και $M \cap M^\perp = \{0\}$, άρα $Cx = 0$ για κάθε $x \in M$).
Αν T_M είναι ο περιορισμός του T στον M, τότε $T_M : M \to M$, αφού $T(M) \subseteq M$, και άρα $T_M \in \mathcal{B}(M)$, $T_M = A$.
Αντιστρόφως, αν $T = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D \end{bmatrix}$, ταυτίζοντας το $x \in M$ με $(x, 0) \in M \oplus M^\perp$ έχουμε:

$$Tx = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Ax \\ 0 \end{bmatrix} \in M \Rightarrow Ax = (Ax, 0) \in M,$$

άρα ο M είναι T-αναλλοίωτος και $T_M = A$.

Άσκηση 0.7. Έστω $S \in \{T\}'$, δηλαδή $TS = ST$.
(i) Αν $x \in \mathcal{N}(T)$ τότε $Tx = 0$, οπότε $0 = STx = TSx \Rightarrow Sx \in \mathcal{N}(T) \Rightarrow \mathcal{N}(T)$ είναι S-αναλλοίωτος. Επίσης για κάθε $x \in X$ είναι $STx = TSx$, οπότε $S\mathcal{R}(T) \subseteq \mathcal{R}(T)$**(1)**. Επομένως $S(\overline{\mathcal{R}(T)}) \subseteq \overline{S\mathcal{R}(T)} \overset{(1)}{\subseteq} \overline{\mathcal{R}(T)}$. Άρα είναι και $\overline{\mathcal{R}(T)}$ S-αναλλοίωτος.

(ii) Αν $\dim X > 1$ και ο T δεν έχει μη τετριμένους αναλλοίωτους υποχώρους τότε προφανώς $T \neq 0$ και δεν έχει μη τετριμένους υπεραναλλοίωτους υποχώρους. Άρα, από (i), $\mathcal{N}(T) = \{0\}$ και $\overline{\mathcal{R}(T)} = Q$.