ΦΥΛΛΑΔΙΟ Ι
Χώροι με εσωτερικό γινόμενο-Χώροι Hilbert
8^o Εξάμηνο ΣΕΜΦΕ 2013

0.1. Στον χώρο $C^1[0,1]$ των μιγαδικών συναρτήσεων με συνεχή παράγωγο, ορίζουμε τη γραμμική απεικόνιση $F : C^1[0,1] \to \mathbb{C}$, $F(x) = x'(1)$. Να δείξετε ότι η F δεν είναι συνεχής ως προς τη supremum νόρμα $\|\cdot\|_\infty$. (Υπόδειξη: Θεωρείστε κατάλληλη ακολουθία συναρτήσεων).

0.2. Στον χώρο $(C[0\,1], \|\cdot\|_\infty)$, να υπολογίσετε τη νόρμα του γραμμικού συναρτησοειδούς

$$f(x) = \int_0^1 tx(t)\mathrm{d}t.$$

0.3. Στον χώρο $X = L_2[0,T]$ θεωρούμε τη συνάρτηση $F : X \to X$, $(Fg)(t) = \int_0^t e^{-(t-s)}g(s)ds$, $t \in [0,T]$. Να βρεθεί συνάρτηση $g \in X$, $\|g\| = 1$, ώστε η τιμή $(Fg)(T)$ να είναι μέγιστη.

0.4. Έστω X διανυσματικός χώρος και $f : X \to \mathbb{C}$ ένα μη μηδενικό γραμμικό συναρτησοειδές. Αν $X = \ker f + M$, δείξτε ότι $\dim M = 1$. Επιπλέον αν N είναι υπόχωρος του X τέτοιος ώστε $\ker f \subsetneqq N$, τότε $N = X$.

0.5. Έστω $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ένας διανυσματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο και $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ η πλήρωσή του. Έστω ακόμη $z \in H \setminus X$ και $M = \{y \in X : \langle y, z\rangle = 0\}$. Δείξτε ότι ο M είναι κλειστός γνήσιος υπόχωρος του X και ότι, αν $x_0 \in X \setminus M$, δεν υπάρχει $y_0 \in M$ τέτοιο ώστε $\|x_0 - y_0\| = d(x_0, M)$.

0.6. Θεωρούμε τον χώρο $X = \{p(t) = \sum_{k=0}^n a_k t^k : a_k \in \mathbb{C},\ n \in \mathbb{N}\}$ δηλαδή το σύνολο όλων των πολυωνύμων μιας μεταβλητής με μιγαδικούς συντελεστές. Ορίζουμε στον X εσωτερικό γινόμενο: $\langle p(t), q(t)\rangle = \sum_{k=0}^\infty a_k\bar{b}_k$, όπου $p(t) = \sum_{k=0}^n a_k t^k$, $q(t) = \sum_{k=0}^n b_k t^k$. Έστω $M = \{p \in X : \sum_{k=0}^\infty (k+1)^{-2}a_k = 0\}$ και η συνάρτηση $f : X \to \mathbb{C}$, $f(p) = f(\sum_{k=0}^n a_k t^k) = \sum_{k=0}^\infty (k+1)^{-2}a_k$. Δείξτε ότι:

(i) Ο X μπορεί να ταυτιστεί με ένα πυκνό υπόχωρο του ℓ_2.

(ii) Η f είναι ένα μη μηδενικό φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές.

(iii) Ο M είναι κλειστός γνήσιος υπόχωρος του X.

(iv) Αν $x_0 \in X \setminus M$ τότε δεν υπάρχει $p_0 \in M$ τέτοιο ώστε $\|x_0 - p_0\| = d(x_0, M) > 0$.

Για την απόδειξη του (iv) ακολουθείστε την εξής διαδικασία: Έστω ότι υπάρχει τέτοιο $p_0 \in M$. Θέστε $z_0 = x_0 - p_0 = c_0 + c_1 t + \cdots + c_m t^m$. Τότε $z_0 \perp M$. Αν $w_i(t) = (i+1)^2 - (m+2)^2 t^{m+1}$ δείξτε ότι είναι $z_0 \perp w_i(t)$ για κάθε $i = 1, 2, ..., m$, οπότε παίρνετε $c_k = 0, k = 1, 2, ..., m$, δηλαδή $z_0 = 0$, που είναι άτοπο (γιατί;)

Γυρίστε σελίδα

0.7. Σ΄ ένα διανυσματικό χώρο X με εσωτερικό γινόμενο δείξτε ότι: Αν $x \in X$ και (x_n) είναι μια ακολουθία στοιχείων του X τέτοια ώστε $\langle x_n, x\rangle \to \langle x, x\rangle$ και $\|x_n\| \to \|x\|$ τότε $x_n \to x$.

0.8. Έστω H ένας χώρος Hilbert, $f, g \in H^*$ και τα διανύσματα $x, y \in H$ που αντιστοιχούν από το θεώρημα του Riesz (θεώρημα 1.4.5) στα συναρτησοειδή f, g (δηλαδή είναι $f(z) = \langle z, x\rangle$ και $g(z) = \langle z, y\rangle$ για κάθε $z \in H$). Ορίζουμε την απεικόνιση $(\ ,\ ) : H^* \times H^* \to \mathbb{C}$ ως $(f, g) = \langle y, x\rangle$. Δείξτε ότι το (f, g) είναι ένα εσωτερικό γινόμενο στον H^* και ότι ο H^* είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον H.

0.9. Έστω X ένας χώρος με εσωτερικό γινόμενο και $f \in X^*$, $f \neq 0$. Δείξτε ότι υπάρχει $z_0 \in X$ τέτοιο ώστε για κάθε $x \in X$ υπάρχει μοναδικός αριθμός $\alpha \in \mathbb{C}$ και $y \in \ker f$, ώστε $x = \alpha z_0 + y$, όπου $\alpha = f(x)$ και $z_0 \in (\ker f)^{\perp}$.

0.10. Αν M, N είναι κλειστοί υπόχωροι ενός χώρου Hilbert με $M \perp N$ δείξτε ότι και ο υπόχωρος $M + N$ είναι κλειστός.

Παράδοση μέχρι την 10-4-2013