ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΙΙ-Φραγμένοι Τελεστές
8^o Εξάμηνο ΣΕΜΦΕ 2013

0.1. Έστω ο χώρος ℓ_2 με τη συνηθισμένη βάση $(\mathbf{e}_n)$, η ακολουθία $a = (a_n)$ μιγαδικών αριθμών και η απεικόνιση $T_a : \ell_2 \to \ell_2$ με $T_a(\mathbf{x}) = (a_1x_1, a_2x_2, ...)$. Να δειχθεί ότι $\lim\limits_n \|T_a^n\| = 0 \Leftrightarrow \sup\limits_k |a_k| < 1$.

0.2. Έστω H ένας χώρος Hilbert και $T \in \mathcal{B}(H)$. Δείξτε ότι τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:
(i) T είναι φυσιολογικός.
(ii) T^n είναι φυσιολογικός για κάθε $n \in \mathbb{N}$.
(iii) $\|T^{*n}x\| = \|T^n x\|$ για κάθε $x \in H$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

0.3. Έστω P, Q ορθογώνιες προβολές του $\mathcal{B}(H)$. Δείξτε ότι τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:
(i) $PQ = P$.
(ii) $QPQ = P$.
(iii) $Q - P$ είναι ορθογώνια προβολή.

0.4. Έστω H ένας χώρος Hilbert και $T \in \mathcal{B}(H)$. Το υποσύνολο $\{T\}' = \{S \in \mathcal{B}(H) : ST = TS\}$ του $\mathcal{B}(H)$ λέγεται **μεταθέτης** του T. Δείξτε ότι αν (L_n) είναι μια ακολουθία του $\{T\}'$, η οποία συγκλίνει ασθενώς στον $L \in \mathcal{B}(H)$, δηλαδή ισχύει $\langle L_n x, y\rangle \to \langle Lx, y\rangle$ για κάθε $x, y \in H$, τότε $L \in \{T\}'$.

0.5. Αν H, K είναι χώροι Hilbert, (T_n) μια ακολουθία του $\mathcal{B}(H, K)$ και $T \in \mathcal{B}(H, K)$, δείξτε ότι:
(i) $T_n \overset{\|\,\|}{\to} T \Leftrightarrow {T^*}_n \overset{\|\,\|}{\to} T^*$.
(ii) $\langle T_n x, y\rangle \to \langle Tx, y\rangle$ για κάθε $x \in H, y \in K \Leftrightarrow \langle {T^*}_n x, y\rangle \to \langle T^* x, y\rangle$ για κάθε $x \in H, y \in K$.

0.6. Έστω M ένας κλειστός υπόχωρος του H και $T \in \mathcal{B}(H)$. Δείξτε ότι, ως προς την διάσπαση $H = M \oplus M^\perp$
(i) Ο T μπορεί να γραφεί ως 2×2 πίνακας της μορφής $T = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$, όπου $A \in \mathcal{B}(M)$, $B \in \mathcal{B}(M^\perp, M)$, $C \in \mathcal{B}(M, M^\perp)$ και $D \in \mathcal{B}(M^\perp)$.
(ii) Η ορθή προβολή P_M του H επί του M γράφεται $P_M = \begin{bmatrix} I_M & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.
(iii) Ειδικότερα, ο M είναι αναλλοίωτος από τον T αν και μόνο αν, $T = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D \end{bmatrix}$, όπου $A = T_M \in \mathcal{B}(M)$ είναι ο περιορισμός του T στον M.

0.7. Έστω X ένας διανυσματικός χώρος με νόρμα και $T \in \mathcal{B}(X)$. Ένας αναλλοίωτος υπόχωρος από τον T λέγεται **υπεραναλλοίωτος** αν είναι αναλλοίωτος και από κάθε τελεστή $S \in \mathcal{B}(X)$ που αντιμετατίθεται με τον T.
(i) Δείξτε ότι οι υπόχωροι $\mathcal{N}(T)$ και $\overline{\mathcal{R}(T)}$ είναι υπεραναλλοίωτοι.
(ii) Αν $\dim X > 1$ και ο T δεν έχει μη τετριμένους αναλλοίωτους υποχώρους (δηλαδή οι μόνοι αναλλοίωτοι υπόχωροι είναι ο $\{0\}$ και ο X) τότε $\mathcal{N}(T) = \{0\}$ και $\overline{\mathcal{R}(T)} = X$.

Παράδοση μέχρι την εξέταση