

Σ.Ε.Μ.Φ.Ε 8ο Εξάμ. 1η εξέταση - κανονική περίοδος Ιούλιος 2013
Θεωρία Τελεστών

Ονοματεπώνυμο

Θ Ε Μ Α Τ Α

Θ1. α) Έστω H ένας διαχωρίσιμος χώρος Hilbert. Να δείξετε ότι:

(i) Κάθε ορθοκανονικό σύνολο είναι αριθμήσιμο (ή πεπερασμένο).

(ii) Δυο οποιεσδήποτε ορθοκανονικές βάσεις έχουν τον ίδιο πληθικό αριθμό.

β) Έστω M ένας κλειστός υπόχωρος ενός χώρου Hilbert H , $\mathbf{m} \in M$ και $\mathbf{h} \in H$. Αν $P_M \mathbf{h}$ είναι η ορθή προβολή του $\mathbf{h}$ επί του M , δείξτε ότι $\mathbf{m} \perp P_M \mathbf{h}$ αν και μόνο αν $\mathbf{m} \perp \mathbf{h}$.

Θ2. Έστω $(X, \|\cdot\|)$, $(Y, \|\cdot\|)$ δύο χώροι με νόρμα και $T : X \rightarrow Y$ μια γραμμική απεικόνιση. Να ορίσετε τότε ο T λέγεται φραγμένος τελεστής. Να δείξετε ότι αν ο T είναι φραγμένος τελεστής τότε ισχύει:

$$\|T\| = \sup\{\|Tx\| : x \in X, \|x\| = 1\} = \sup\left\{\frac{\|Tx\|}{\|x\|} : x \in X, x \neq 0\right\}.$$

Θ3. α) Έστω H ένας χώρος Hilbert. Να ορίσετε πότε ένας τελεστής $T \in \mathcal{B}(H)$ λέγεται:

(i) φυσιολογικός. (ii) ισομετρία. (iii) θετικός.

Να δείξετε ότι:

1. Αν A φυσιολογικός, τότε είναι $\|Ax\| = \|A^*x\|$ για κάθε $x \in H$, και να συμπεράνετε ότι για $x \in H$ και $\lambda \in \mathbb{C}$ είναι $Ax = \lambda x \Leftrightarrow A^*x = \bar{\lambda}x$.

2. Αν $S, T \in \mathcal{B}(H)$ είναι τέτοιοι ώστε $0 \leq S \leq T$, τότε είναι $A^*SA \leq A^*TA$ για κάθε $A \in \mathcal{B}(H)$, και $\|S\| \leq \|T\|$.

β) Έστω H ένας χώρος Hilbert και M ένας κλειστός υπόχωρός του.

(i) Να δείξετε ότι η ορθή προβολή P_M είναι φραγμένος τελεστής με $\|P_M\| = 1$.

(ii) Αν P, Q είναι οι ορθές προβολές του H επί των κλειστών υποχώρων M, N αντίστοιχα, να δείξετε ότι $\|Px\| \leq \|Qx\| \forall x \in H \Leftrightarrow M \subseteq N \Leftrightarrow QP = P$.

Θ4. α) Έστω X ένας χώρος Banach και $T \in \mathcal{B}(X)$. Πότε λέμε ότι ο T είναι κάτω φραγμένος; Να δείξετε ότι ένας τελεστής $T \in \mathcal{B}(X)$ είναι αντιστρέψιμος αν είναι κάτω φραγμένος και έχει πυκνό σύνολο τιμών ($\mathcal{R}(T) = X$),

β) Έστω H ένας χώρος Hilbert και $T \in \mathcal{B}(H)$. Να δείξετε ότι ο τελεστής T είναι αντιστρέψιμος αν οι τελεστές T και T^* είναι κάτω φραγμένοι.

Θ5. Έστω H ένας άπειρης διάστασης διαχωρίσιμος χώρος Hilbert και $A \in \mathcal{B}(H)$. Πότε ο A λέγεται συμπαγής;

(i) Να δείξετε ότι αν A, B είναι συμπαγείς τελεστές τότε και οι AB, BA είναι συμπαγείς τελεστές.

(ii) Να δείξετε ότι αν $A \in \mathcal{B}(H)$ είναι συμπαγής τελεστής τότε για κάθε ορθοκανονική ακολουθία $(\mathbf{x}_n)$ ισχύει: $\|A\mathbf{x}_n\| \rightarrow 0$ (υπόδειξη Θεωρήστε γνωστό ότι $\langle A\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_n \rangle \rightarrow 0$).

(iii) Θεωρήστε τους τελεστές επί του $\ell_2 : T(x_1, x_2, x_3, \dots) = (x_1, 0, x_3, 0, x_5, \dots)$ και $S(x_1, x_2, x_3, \dots) = (0, x_2, 0, x_4, 0, x_6, \dots)$. Να εξετάσετε αν οι τελεστές T, S, TS είναι συμπαγείς.

Τα θέματα είναι ισοδύναμα. Για το άριστα απαιτούνται τρία ολοκληρωμένα θέματα. Διάρκεια εξέτασης 2,5 ώρες.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ