Σ.Ε.Μ.Φ.Ε 8ο Εξάμ. 1η εξέταση - Ιούνιος 2003

Θεωρία Τελεστών

Θ Ε Μ Α Τ Α

Θ1. α) Έστω S ένα μη κενό υποσύνολο ενός χώρου Hilbert H. Δείξτε ότι ισχύουν:
(i) Το $S^{\perp}$ είναι κλειστός υπόχωρος του H.
(ii) $S \subseteq S^{\perp\perp}$ $\quad (S^{\perp\perp} \underset{o\rho\sigma}{=\!=} (S^{\perp})^{\perp})$.
(iii) $S \cap S^{\perp} = \{\mathbf{0}\}$.
β) Αν M είναι ένας κλειστός υπόχωρος του χώρου Hilbert H, τότε $M = M^{\perp\perp}$.
γ) Δείξτε ότι το ορθογώνιο συμπλήρωμα του υπόχωρου του ℓ_2, που παράγεται από το διάνυσμα $\mathbf{x}_0 = (1, -1, 0, 0, ...)$, είναι το σύνολο όλων των διανυσμάτων της μορφής $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_1, \xi_3, \xi_4, ...)$. Κατόπιν να εκφράσετε το τυχόν διάνυσμα $\mathbf{x} \in \ell_2$ ως άθροισμα $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$, όπου $\mathbf{x}_1 \in [\mathbf{x}_0]$ και $\mathbf{x}_2 \in [\mathbf{x}_0]^{\perp}$.

Θ2. Έστω $\{\mathbf{e}_i : i = 1, 2, ...\}$ μία ορθοκανονική ακολουθία.
α) Αν $\mathbf{h} \in H$ να δείξετε ότι η σειρά $\sum_{i=1}^{\infty} \langle \mathbf{h}, \mathbf{e}_i \rangle \mathbf{e}_i$ συγκλίνει σ' ένα $\mathbf{h}' \in H$, τέτοιο ώστε: $\mathbf{h} - \mathbf{h}' \perp \mathbf{e}_i \ \forall\, i = 1, 2, ...$
β) Να δείξετε ότι τα παρακάτω είναι ισοδύναμα.
(i) Η ακολουθία $(\mathbf{e}_i)$ είναι ορθοκανονική βάση, (ισοδύναμα μεγιστική, δηλαδή δεν υπάρχει ορθοκανονικό υποσύνολο $S \subseteq H$, τέτοιο ώστε $\{\mathbf{e}_i : i \in \mathbb{N}^*\} \subset S$).
(ii) Αν $\langle \mathbf{h}\,, \mathbf{e}_i \rangle = 0 \ \forall\, i = 1, 2, ...$ τότε $\mathbf{h} = \mathbf{0}$.
(iii) $\mathbf{h} = \sum_{i=1}^{\infty} \langle \mathbf{h}\,, \mathbf{e}_i \rangle \mathbf{e}_i \ \ \forall\, \mathbf{h} \in H$.
γ) Δείξτε ότι για κάθε $f \in C[0, 1]$ ισχύει $\left| \int_0^1 f(t) \sin(\pi t) dt \right| \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\int_0^1 |f(t)|^2 dt \right)^{1/2}$ και προσδιορείστε τις συναρτήσεις f για τις οποίες η παραπάνω σχέση ισχύει ως ισότητα.

Θ3. α) Να δώσετε τον ορισμό του (γραμμικού) φραγμένου τελεστή $T : X \to Y$, όπου $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ δύο χώροι με νόρμα.
β) Έστω X, Y χώροι με νόρμα και $T : X \to Y$ ένας φραγμένος τελεστής. Δείξτε ότι είναι:

$$\|T\| = \sup\{\|T\mathbf{x}\| : \mathbf{x} \in X, \|\mathbf{x}\| = 1\} = \sup\left\{ \frac{\|T\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} : \mathbf{x} \in X, \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \right\} = \inf\{c > 0 : \|T\mathbf{x}\| \leq c\|\mathbf{x}\| \quad \forall\, \mathbf{x} \in X\}$$

γ) Έστω H χώρος Hilbert, $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ...\}$ μία ορθοκανονική βάση του H και $(\lambda_n)_n$ μία φραγμένη ακολουθία μιγαδικών αριθμών. Ορίζουμε την απεικόνιση: $T\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_i \rangle \mathbf{e}_i$, για κάθε $\mathbf{x} \in H$. Δείξτε ότι η T είναι γραμμική, ισχύει $T\mathbf{e}_n = \lambda_n \mathbf{e}_n$, $\forall\, n$ και $\|T\| = \sup\limits_i |\lambda_i|$.

Θ4. α) Να δώσετε τον ορισμό του συζυγή A^* ενός τελεστή $A \in \mathcal{B}(H)$ και να αποδείξετε τις ιδιότητες:
i) $(\lambda A)^* = \overline{\lambda} A^*$, $\lambda \in \mathbb{C}$. **ii)** $(AB)^* = B^* A^*$. **iii)** $\|A^* A\| = \|A\|^2$.
β) Να δείξετε ότι ένας τελεστής $A \in \mathcal{B}(H)$ είναι αυτοσυζυγής αν και μόνο αν $\langle A\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \in \mathbb{R} \ \forall\, \mathbf{x} \in H$.

Θ5. α) Έστω H ένας χώρος Hilbert και $P \in \mathcal{B}(H)$ ένας ταυτοδύναμος ($P^2 = P$) τελεστής. Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:
(i) Ο P είναι ορθογώνια προβολή. (ii) Ο P είναι αυτοσυζυγής.
β) Αν P είναι η ορθογώνια προβολή του χώρου Hilbert H επί του κλειστού υποχώρου του M και $A \in \mathcal{B}(H)$, δείξτε ότι:
(i) Ο M είναι A-αναλλοίωτος, δηλαδή $AM \subseteq M$ αν και μόνο αν είναι $AP = PAP$.
(ii) Οι $M, M^{\perp}$ είναι A-αναλλοίωτοι αν και μόνο αν $AP = PA$.
(iii) Αν $A = A^*$ τότε ο M είναι A-αναλλοίωτος αν και μόνο αν ο $M^{\perp}$ είναι A-αναλλοίωτος.

Θ6. α) Να δώσετε τον ορισμό του συμπαγή φραγμένου τελεστή και να διατυπώσετε ισοδύναμες προτάσεις με τον ορισμό αυτό. Αν $\mathcal{K}(H)$ είναι το σύνολο των συμπαγών τελεστών επί του χώρου Hilbert H, να δείξετε ότι το $\mathcal{K}(H)$ είναι γραμμικός υπόχωρος του $\mathcal{B}(H)$ και ότι αν $A \in \mathcal{K}(H)$ και $B \in \mathcal{B}(H)$ τότε $AB, BA \in \mathcal{K}(H)$.
β) Έστω ο τελεστής $W = SD$, όπου S, D οι τελεστές στον ℓ_2, με
$S(x_1, x_2, ...) = (0, x_1, x_2, ...)$ και $D(x_1, x_2, ...) = (x_1, 1/2x_2, 1/3x_3, ...)$. Δείξτε ότι ο W είναι συμπαγής και δεν έχει ιδιοτιμές.

Θ7. α) Να διατυπώσετε το φασματικό θεώρημα για ένα αυτοσυζυγή συμπαγή τελεστή στις διάφορες μορφές του.
β)Αν H είναι ένας άπειρης διάστασης χώρος Hilbert, $A \in \mathcal{K}(H)$ αυτοσυζυγής συμπαγής τελεστής και $\ker A = \{0\}$, δείξτε ότι υπάρχει ακολουθία (A_n) φραγμένων τελεστών επί του H τέτοια, ώστε $\lim A_n A\mathbf{x} = AA_n\mathbf{x} = \mathbf{x}$ για κάθε $\mathbf{x} \in H$. Υπάρχει ακολουθία (A_n) τέτοια, ώστε $A_n A \to I$, ως προς την νόρμα του $\mathcal{B}(H)$;

Τα θέματα είναι ισοδύναμα. Για το άριστα απαιτούνται τέσσερα ολοκληρωμένα θέματα. Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ