Σ.Ε.Μ.Φ.Ε 8ο Εξάμ. 1η εξέταση - Ιούνιος 2004
Θεωρία Τελεστών

Θ Ε Μ Α Τ Α

Θ1. **α)** Έστω S ένα μη κενό υποσύνολο ενός χώρου Hilbert H.

(i) Δώστε τον ορισμό του ορθογωνίου συμπληρώματος $S^{\perp}$ του S.

(ii) Δείξτε ότι Το $S^{\perp}$ είναι κλειστός υπόχωρος του H και ότι ισχύει $S^{\perp} = S^{\perp\perp\perp}$ (οι άλλες ιδιότητες του ορθογωνίου συμπληρώματος θεωρούνται γνωστές).

(iii) Δείξτε ότι, αν M, N είναι κλειστοί υπόχωροι του H, με $M \perp N$ τότε και ο $M + N$ είναι κλειστός υπόχωρος.

Θ2. Έστω X, Y χώροι με νόρμα και $T : X \to Y$ μία γραμμική απεικόνιση.

(i) Δώστε τον ορισμό της έννοιας «T φραγμένος τελεστής» και διατυπώστε ισοδύναμες εκφράσεις για την νόρμα $\|T\|$ του T.

(ii) Να δείξετε ότι: **α)** Αν T φραγμένος τότε T είναι ομοιόμορφα συνεχής.

β) Ο T είναι φραγμένος τελεστής αν και μόνο αν υπάρχει $c > 0$ τέτοις ώστε $\|T\mathbf{x}\| \leq c\,\|\mathbf{x}\|$, για κάθε $\mathbf{x} \in X$.

(iii) Στον χώρο $L^2[a,b]$, με $f \in C[a,b]$, ορίζουμε τον τελεστή $M_f : L^2[a,b] \to L^2[a,b]$, $(M_f\varphi)(x) = f(x)\varphi(x)$. Να δείξετε ότι ο M_f είναι γραμμικός φραγμένος τελεστής.

Θ3. Δίνεται ο τελεστής $T : L^2[0,1] \to L^2[0,1]$, $(Tf)(x) = \sqrt{2x}f(x^2)$. Να δείξετε ότι:

(i) $\|T\| = 1$.

(ii) Ο συζυγής T^* του T είναι ο $(T^*f)(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2}\sqrt[4]{x}}f(\sqrt{x})$.

(iii) Ο T είναι ορθομοναδιαίος, δηλαδή $T^*T = TT^* = I$.

Θ4. Έστω A, $B \in \mathcal{B}(H)$ αυτοσυζυγείς τελεστές. Δείξτε ότι:

(i) $-\|A\|I \leq A \leq \|A\|I$.

(ii) Ο $A + \|A\|I$ είναι θετικός.

(iii) Κάθε αυτοσυζυγής τελεστής γράφεται ως διαφορά δύο θετικών τελεστών.

(iv) Είναι $AB = BA$ αν και μόνο αν για κάθε $x \in H$ ισχύει $\|(A + iB)\mathbf{x}\|^2 = \|A\mathbf{x}\|^2 + \|B\mathbf{x}\|^2$.

Θ5. Έστω H ένας χώρος Hilbert, M, N κλειστοί υπόχωροι του H και P_N, P_M οι αντίστοιχες ορθές προβολές.

(i) Να δείξετε ότι το γινόμενο $P_N P_M$ είναι ορθή προβολή αν και μόνο αν $P_N P_M = P_M P_N$. Στην περίπτωση αυτή να δείξετε ότι είναι $(P_M P_N)(H) = M \cap N$.

(ii) Αν ο $U \in \mathcal{B}(H)$ είναι ορθομοναδιαίος και ο $P \in \mathcal{B}(H)$ είναι ορθή προβολή, δείξτε ότι και ο $Q = U^{-1}PU$ είναι επίσης ορθή προβολή.

Θ6. Έστω H διαχωρίσιμος χώρος Hilbert και $\mathcal{K}(H)$ το σύνολο των συμπαγών τελεστών επί του H. Να δείξετε ότι:

(i) $A \in \mathcal{K}(H)$ αν και μόνο αν για κάθε φραγμένη ακολουθία (x_n) του H, η ακολουθία (Ax_n) έχει μία συγκλίνουσα υπακολουθία.

(ii) $A \in \mathcal{K}(H) \Leftrightarrow A^*A \in \mathcal{K}(H)$.

(iii) $A \in \mathcal{K}(H) \Leftrightarrow A^* \in \mathcal{K}(H)$.

Τα θέματα είναι ισοδύναμα. Για το άριστα απαιτούνται τέσσερα ολοκληρωμένα θέματα. Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ