**Σ.Ε.Μ.Φ.Ε** 8ο Εξάμ. 1η εξέταση - Ιούνιος 2005
**Θεωρία Τελεστών**

Ονοματεπώνυμο ..........................................................................................

## Θ Ε Μ Α Τ Α

**Θ1.** Έστω $S$ ένα μη κενό υποσύνολο ενός άπειρης διάστασης μιγαδικού χώρου Hilbert $H$.

**(i)** Δώστε τον ορισμό του ορθογωνίου συμπληρώματος $S^{\perp}$ του $S$.

**(ii)** Να δειχθεί ότι αν το $S$ είναι πυκνό στον $H$ τότε ισχύει $S^{\perp} = \{\mathbf{0}\}$.

**(iii)** Έστω $M$, $N$ κλειστοί υπόχωροι του $H$, με $M \subset N$, $M \neq N$. Να δείξετε ότι υπάρχει $\mathbf{z} \in N$, $\mathbf{z} \neq \mathbf{0}$ τέτοιο ώστε $\mathbf{z} \perp M$.

**(iv)** Αν $P_M$ είναι η ορθή προβολή του $H$ επί του $M$, $\mathbf{m} \in M$ και $\mathbf{x} \in H$ να δειχθεί ότι $\mathbf{m} \perp P_M \mathbf{x}$ αν και μόνο αν $\mathbf{m} \perp \mathbf{x}$.

**Θ2.** Έστω $X$, $Y$ χώροι με νόρμα και $T : X \to Y$ μία γραμμική απεικόνιση.

**(i)** Δώστε τον ορισμό της έννοιας «$T$ φραγμένος τελεστής».

**(ii)** Να δείξετε ότι ο $T$ είναι φραγμένος τελεστής αν και μόνο αν υπάρχει $c > 0$ τέτοιος ώστε $\|T\mathbf{x}\| \leq c\,\|\mathbf{x}\|$, για κάθε $\mathbf{x} \in X$.

**(iii)** Έστω ο τελεστής $T : \ell_2 \to \ell_2$, $T\{x_1, x_2, x_3, ...\} = \{0, 4x_1, x_2, 4x_3, x_4, ...\}$. Να βρείτε τον $T^2$ και να υπολογίσετε τις νόρμες $\|T\|$, $\|T^2\|$.

**(iv)** Αν $(c_n)$ είναι μια ακολουθία στοιχείων του $\ell^{\infty}$ να δείξετε ότι η γραμμική απεικόνιση $T : \ell_2 \to \ell_2$, $T\{x_n\} = \{c_n x_n\}$ είναι καλά ορισμένη και είναι φραγμένος τελεστής.

**Θ3.** Έστω $H$ ένας χώρος Hilbert, $M, N$ κλειστοί υπόχωροι του $H$ και $P_N$, $P_M$ οι αντίστοιχες ορθές προβολές.

**(i)** Να δείξετε ότι το γινόμενο $P_N P_M$ είναι ορθή προβολή αν και μόνο αν $P_N P_M = P_M P_N$. Στην περίπτωση αυτή να δείξετε ότι είναι $(P_M P_N)(H) = M \cap N$. Επίσης $M \perp N \Leftrightarrow P_M P_N = 0$.

**(ii)** Έστω ο χώρος $L^2[a,b]$, $\Delta \subseteq [a,b]$ ένα υποδιάστημα του $[a,b]$ και η απεικόνιση $P_{\Delta} f = g$, όπου

$$g(t) = \begin{cases} f(t), \ t \in \Delta \\ 0, \ t \notin \Delta \end{cases} .$$

Να δειχθεί ότι η $P_{\Delta}$ είναι ορθογώνια προβολή με σύνολο τιμών το $\mathcal{R}(P_{\Delta}) = \{f \in L^2[a,b] : f(t) = 0, \ \forall t \notin \Delta\}$. Ποιός είναι ο πυρήνας της $P_{\Delta}$;

**Θ4.** Έστω $H$ ένας χώρος Hilbert και $A, B \in \mathcal{B}(H)$. Δείξτε ότι:

**(i)** Ο $A^*A$ είνα θετικός τελεστής.

**(ii)** $\ker(A) = \ker(A^*A)$.

**(iii)** $\overline{\mathrm{Im} A^*} = \overline{\mathrm{Im} A^*A}$.

**(iv)** $(AB)^* = B^*A^*$.

**(v)** Αν οι $A$, $B$ είναι αυτοσυζυγείς, τότε ο $AB$ είναι αυτοσυζυγής αν και μόνο αν $AB = BA$.

**Θ5.** Έστω $H$ ένας άπειρης διάστασης διαχωρίσιμος χώρος Hilbert.

**(i)** Να δείξετε ότι το σύνολο $\mathcal{K}(H)$ των συμπαγών τελεστών του $H$ είναι ένα δίπλευρο ιδεώδες της αλγεβρας $\mathcal{B}(H)$ των φραγμένων τελεστών επί του $H$.

**(ii)** Να δείξετε ότι κάθε αντιστρέψιμος τελεστής του $\mathcal{B}(H)$ δεν είναι συμπαγής, διατυπώνοντας τα σχετικά αποτελέσματα που θα χρησιμοποιήσετε.

**Θ6.** **(i)** Να διατυπώσετε το φασματικό θεώρημα για έναν αυτοσυζυγή συμπαγή τελεστή $A \in \mathcal{B}(H)$ και να αποδείξετε ότι αν $(\lambda_n)$ είναι η ακολουθία των μη μηδενικών ιδιοτιμών του $A$ τότε η αντίστοιχη ορθοκανονική ακολουθία $(\mathbf{x_n})$ των ιδιοδιανυσμάτων του είναι μια ορθοκανονική βάση του $(\ker A)^{\perp} = \overline{\mathrm{Im\,A}}$.

**(ii)** Αν $A \in \mathcal{K}(H)$ είναι ένας αυτοσυζυγής συμπαγής τελεστής, $B \in \mathcal{B}(H)$ είναι ένας φραγμένος τελεστής και $P_i$ η ορθή προβολή του $H$ επί του ιδιόχωρου $N_i$ του $A$, να δείξετε ότι $AB = BA$ αν και μόνο αν $BP_i = P_i B$ για κάθε $i \geq 1$.

**Τα θέματα είναι ισοδύναμα. Για το άριστα απαιτούνται τέσσερα ολοκληρωμένα θέματα. Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες.**

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**