Σ.Ε.Μ.Φ.Ε 8ο Εξάμ. 1η εξέταση - περίοδος Ιουνίου 2006

Θεωρία Τελεστών

Ονοματεπώνυμο ....

Θ Ε Μ Α Τ Α

Θ1. Έστω S ένα μη κενό υποσύνολο ενός άπειρης διάστασης μιγαδικού χώρου Hilbert H.

(i) Δώστε τον ορισμό του ορθογωνίου συμπληρώματος $S^{\perp}$ του S και δείξτε ότι ισχύει $S \subseteq S^{\perp\perp}$.

(ii) Να δειχθεί ότι αν το S είναι πυκνό στον H τότε ισχύει $S^{\perp} = \{\mathbf{0}\}$.

(iii) Δείξτε ότι το $S^{\perp\perp}$ είναι ο μικρότερος κλειστός υπόχωρος του H που περιέχει το S και συμπεράνατε ότι αν M είναι ένας υπόχωρος του H τότε ισχύει: $M^{\perp} = \{0\} \Leftrightarrow \overline{M} = H$.

Θ2. Έστω X, Y χώροι με νόρμα και $T : X \to Y$ μία γραμμική απεικόνιση.

(i) Πότε λέμε ότι η T είναι φραγμένος τελεστής; Δώστε ένα παράδειγμα φραγμένου τελεστή.

(ii) Να δείξετε ότι ο T είναι φραγμένος τελεστής αν και μόνο αν υπάρχει $0 < M < \infty$ τέτοιος ώστε $\|T\mathbf{x}\| \leq M\,\|\mathbf{x}\|$, για κάθε $\mathbf{x} \in X$ και να συμπεράνετε ότι ο φραγμένος τελεστής απεικονίζει φραγμένα υποσύνολα του X σε φραγμένα υποσύνολα του Y.

(iii) Να δείξετε ότι η απεικόνιση $M_f : L^2[a,b] \to L^2[a,b], (M_f\varphi)(x) = f(x)\varphi(x)$ είναι φραγμένος τελεστής.

Θ3. Στον χώρο $L^2(0,+\infty)$ ορίζουμε την απεικόνιση $Tf(x) = f(x+1)$, $x > 0$. Δείξτε ότι:

(i) $T^n f(x) = f(x+n)$ για κάθε $n \geq 1$.

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} \|T^n f\| = 0$ για κάθε $f \in L^2(0,+\infty)$.

(iii) $\|T^n\| = 1$ για κάθε $n \geq 1$.

Θ4. Έστω H, K χώροι Hilbert και μια απεικόνιση $\varphi : H \times K \to \mathbb{C}$.

(i) Να ορίσετε πότε η φ λέγεται ημιαντιδιγραμμική (sesquilinear) μορφή. Να αναφέρετε τη σχέση που υπάρχει μεταξύ των μορφών αυτών και των φραγμένων τελεστών.

(ii) Αν $A \in \mathcal{B}(H,K)$ να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικός τελεστής $A^* : K \to H$, $A^* \in .\mathcal{B}(K,H)$ με $\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^*y\rangle$ για κάθε $x \in H$, $y \in K$ και $\|A^*\| = \|A\|$.

(iii) Έστω $H = L^2(0,1)$ και $U \in \mathcal{B}(H)$ τέτοιος ώστε $Uf(x) = \sqrt{2x}f(x^2)$, $x \in (0,1)$. Να βρεθεί ο συζυγής U^* και να δειχθεί ότι είναι $UU^* = U^*U = I$.

Θ5. Έστω H ένας άπειρης διάστασης διαχωρίσιμος χώρος Hilbert και $A \in \mathcal{B}(H)$.

(i) Να δώσετε τον ορισμό του συμπαγούς τελεστή και να δείξετε ότι ο A είναι συμπαγής τελεστής αν και μόνο αν για κάθε φραγμένη ακολουθία (x_n) του H η ακολουθία (Ax_n) έχει μια συγκλίνουσα υπακολουθία.

(ii) Τι γνωρίζετε για το φάσμα των αυτοσυζυγών συμπαγών τελεστών; (αναφέρατε όσες ιδιότητες γνωρίζετε). Υπάρχει αυτοσυζυγής συμπαγής τελεστής που να μην μη μηδενικές ιδιοτιμές; Αν ναι ποιος είναι αυτός; Αιτιολογείστε.

(iii) Δείξτε ότι αν $T \in \mathcal{B}(H)$ είναι αυτοσυζυγής συμπαγής τελεστής, τέτοιος ώστε $T^n = 0$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}$, τότε $T = 0$.

Θ6. Έστω H ένας άπειρης διάστασης διαχωρίσιμος χώρος Hilbert και έστω (N_i) μια ακολουθία από ανά δύο κάθετους υποχώρους του H και P_i η αντίστοιχη ορθή προβολή επί του N_i.

(i) Να δείξετε ότι για κάθε $x \in H$ η σειρά $\sum_{i=1}^{\infty} P_i x$ συγκλίνει σε ένα $x' \in H$, τέτοιο ώστε $(x - x')\perp N_i$ για κάθε $i = 1, 2, ...$ Επιπλέον δείξτε ότι αν $\overline{[N_i : i \in \mathbb{N}]} = H$ τότε κάθε $x \in H$ γράφεται ως $x = \sum_{i=1}^{\infty} P_i x$ και άρα $H = \bigoplus\limits_{i=1}^{\infty} N_i$.

(ii) Να διατυπώσετε το φασματικό θεώρημα για έναν αυτοσυζυγή συμπαγή τελεστή $A \in \mathcal{B}(H)$.

Τα θέματα είναι ισοδύναμα. Για το άριστα απαιτούνται τέσσερα ολοκληρωμένα θέματα. Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ