Σ.Ε.Μ.Φ.Ε 8ο Εξάμ. 1η εξέταση - κανονική περίοδος 2007
Θεωρία Τελεστών

Ονοματεπώνυμο ....

Θ Ε Μ Α Τ Α

Θ1. α) Να ορίσετε τις έννοιες:
(i) «Εσωτερικό γινόμενο» (σ΄ ένα μιγαδικό διανυσματικό χώρο). (ii) «Χώρος Hilbert» και να δώσετε δυο παραδείγματα χώρων Hilbert.

β) Έστω $\{\mathbf{e}_i : i = 1, 2, ...\}$ μια ορθοκανονική ακολουθία. Αν $\mathbf{h} \in H$ να δείξετε ότι η σειρά $\sum_{i=1}^{\infty} \langle \mathbf{h}, \mathbf{e}_i \rangle \mathbf{e}_i$ συγκλίνει σ΄ ένα $\mathbf{h}' \in H$, τέτοιο ώστε: $\mathbf{h} - \mathbf{h}' \perp \mathbf{e}_i \ \forall \, i = 1, 2, ...$.

Θ2. Έστω X, Y χώροι με νόρμα και $T : X \to Y$ μια γραμμική απεικόνιση.

(i) Πότε λέμε ότι η T είναι φραγμένος τελεστής;

(ii) Να δείξετε ότι η T είναι φραγμένος τελεστής αν και μόνο αν υπάρχει $0 < M < \infty$ τέτοιος ώστε $\|T\mathbf{x}\| \leq M \|\mathbf{x}\|$, για κάθε $\mathbf{x} \in X$ και να συμπεράνετε ότι ο φραγμένος τελεστής απεικονίζει φραγμένα υποσύνολα του X σε φραγμένα υποσύνολα του Y.

(iii) Να δείξετε ότι η απεικόνιση $T : \ell_2 \to \ell_2$, $T(x_1, x_2, x_3, x_4, ...) = (0, 4x_1, x_2, 4x_3, x_4, ...)$ είναι φραγμένος τελεστής και να υπολογίσετε τη νόρμα του.

Θ3. α) Έστω H, K χώροι Hilbert και $A \in \mathcal{B}(H, K)$. Να ορίσετε τον συζυγή τελεστή A^* του A και να δείξετε τις σχέσεις: $\|A^*\| = \|A\|$, $(AB)^* = B^*A^*$, $\|A^*A\| = \|A\|^2$, $\ker A = (\mathrm{ImA}^*)^{\perp}$.

β) Έστω H ένας χώρος Hilbert, M, N κλειστοί υπόχωροι του H και P_N, P_M οι αντίστοιχες ορθές προβολές. Να δείξετε ότι $P_N \leq P_M \Leftrightarrow \|P_N x\| \leq \|P_M x\| \ \ \forall \ \ x \in H$.

Θ4. Έστω H ένας άπειρης διάστασης διαχωρίσιμος χώρος Hilbert και $A \in \mathcal{B}(H)$. Πότε ο A λέγεται συμπαγής;

(i) Να δείξετε ότι ο A είναι συμπαγής αν και μόνο αν για κάθε φραγμένη ακολουθία (x_n) του H, η ακολοθία (Ax_n) έχει μια συγκλίνουσα υπακολουθία.

(ii) Να δείξετε ότι ο $A \in \mathcal{B}(H)$ είναι συμπαγής αν και μόνο αν υπάρχει ακολουθία τελεστών πεπερασμένης τάξης, η οποία συγκλίνει νορμ, στον A.

(iii) Να δείξετε ότι αν ο $A \in \mathcal{B}(H)$ είναι συμπαγής τότε για κάθε ορθοκανονική ακολουθία (x_n) ισχύει $\|Ax_n\| \to 0$ (θεωρείστε γνωστό ότι $\langle Ax_n, x_n \rangle \to 0$).

Θ5. Έστω H ένας άπειρης διάστασης διαχωρίσιμος χώρος Hilbert.

(i)Να διατυπώσετε το φασματικό θεώρημα για έναν αυτοσυζυγή συμπαγή τελεστή $A \in \mathcal{B}(H)$.

(ii) Έστω N_i, $i = 1, 2, ...$ οι ιδιόχωροι, αντίστοιχοι των διαφορετικών μη μηδενικών ιδιοτιμών ενός αυτοσυζυγούς συμπαγούς τελεστή $A \in \mathcal{B}(H)$ και P_i η ορθή προβολή επί του N_i. Να δείξετε ότι, αν για έναν τελεστή $B \in \mathcal{B}(H)$ είναι $BP_i = P_i B$ για κάθε $i \geq 1$, τότε είναι και $AB = BA$.

(iii) Να δείξετε ότι αν $T \in \mathcal{B}(H)$ είναι ένας αυτοσυζυγής συμπαγής τελεστής, τότε και ο T^n είναι αυτοσυζυγής συμπαγής τελεστής για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και ισχύει $\|T^n\| = \|T\|^n$.

Τα θέματα είναι ισοδύναμα. Για το άριστα απαιτούνται τέσσερα ολοκληρωμένα θέματα. Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ