

Σ.Ε.Μ.Φ.Ε 8ο Εξάμ. 1η εξέταση - κανονική περίοδος 2009
Θεωρία Τελεστών

Ονοματεπώνυμο

Θ Ε Μ Α Τ Α

Θ1. Έστω V ένας μιγαδικός διανυσματικός χώρος.

(i) Να ορίσετε την έννοια του εσωτερικού γινομένου $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ στον μιγαδικό χώρο V .

(ii) Να δείξετε ότι: το εσωτερικό γινόμενο

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : (V, \| \cdot \|) \times (V, \| \cdot \|) \rightarrow (\mathbb{C}, | \cdot |)$$

είναι συνεχής συνάρτηση, όπου $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$.

(iii) Να διατυπώσετε τον κανόνα του παραλληλογράμμου.

(iv) Θεωρώντας τις συναρτήσεις $f(t) = 1$, $g(t) = t$, $t \in [0, 1]$ στον χώρο $(C[0, 1], \| \cdot \|_\infty)$, να δείξετε ότι δεν υπάρχει εσωτερικό γινόμενο στον $C[0, 1]$ που να ορίζει την νόρμα $\| \cdot \|_\infty$.

Θ2. Έστω V ένας μιγαδικός διανυσματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο.

(i) Αν S είναι ένα μη κενό υποσύνολό του, να ορίσετε το ορθογώνιο συμπλήρωμα $S^\perp$ του S και να δείξετε ότι είναι κλειστός υπόχωρος του V .

(ii) Αν H είναι ένας χώρος Hilbert και M ένας κλειστός υπόχωρός του να δείξετε ότι ισχύει: $H = M \oplus M^\perp$.

(iii) Έστω P, Q ορθογώνιες προβολές του $\mathcal{B}(H)$. Να δείξετε ότι τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

(α) $PQ = P$

(β) $QPQ = P$

(γ) $Q - P$ είναι ορθογώνια προβολή.

Θ3. Έστω H, K χώροι Hilbert. Να δείξετε ότι:

(i) Αν $A \in \mathcal{B}(H, K)$ τότε η απεικόνιση $\varphi_A : H \times K \rightarrow \mathbb{C}$, $\varphi_A(x, y) = \langle Ax, y \rangle$ είναι μια ημιαντι-διγραμμική μορφή.

(ii) Κάθε φραγμένη ημιαντι-διγραμμική μορφή προκύπτει μ' αυτόν τον τρόπο.

(iii) Αν $T \in \mathcal{B}(H)$, τότε T φυσιολογικός αν και μόνο αν, T^n φυσιολογικός για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$

Θ4. Έστω H ένας χώρος Hilbert.

(i) Να δείξετε ότι το σύνολο $\mathcal{K}(H)$ των συμπαγών τελεστών είναι δίπλευρο ιδεώδες του $\mathcal{B}(H)$.

(ii) Έστω $A \in \mathcal{B}(H)$. Αν $A^*A = 0$, τότε $A = 0$.

(iii) Έστω P, Q ορθογώνιες προβολές του $\mathcal{B}(H)$. Δείξτε ότι $PQP = QPQ \Leftrightarrow PQ = QP$.

Θ5. (i) Να διατυπώσετε την πρώτη μορφή του φασματικού θεωρήματος για ένα αυτοσυζυγή συμπαγή τελεστή $A \in \mathcal{B}(H)$.

(ii) Αν P_i , $i \geq 1$ είναι οι ορθές προβολές του H επί των αντίστοιχων ιδιόχωρων N_i , $i \geq 1$, δείξτε ότι για $B \in \mathcal{B}(H)$ είναι: $AB = BA \Leftrightarrow P_i B = B P_i$, $\forall i \geq 1$.

(iii) Έστω $A \in \mathcal{B}(H)$ ένας αυτοσυζυγής συμπαγής τελεστής. Αν υπάρχει k φυσικός αριθμός τέτοιος ώστε $A^k = 0$, δείξτε ότι $A = 0$, αναφέροντας αναλυτικά όλα τα σημεία της αιτιολόγησης.

Τα θέματα είναι ισοδύναμα. Για το άριστα απαιτούνται τέσσερα ολοκληρωμένα θέματα. Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ