

Ονοματεπώνυμο

Θ Ε Μ Α Τ Α

Θ1. Έστω H χώρος Hilbert. Να δείξετε ότι:

α) Αν $\{\mathbf{e}_i : i = 1, 2, \dots, n\}$ είναι ένα πεπερασμένο ορθοκανονικό σύνολο και $\mathbf{h} \in H$, τότε ισχύει:

$$\sum_{i=1}^n |a_i|^2 \leq \|\mathbf{h}\|^2, \text{ όπου } a_i = \langle \mathbf{h}, \mathbf{e}_i \rangle, i = 1, 2, \dots, n.$$

β) Αν $\{\mathbf{e}_i : i \in \mathbb{N}^*\}$ είναι μια ορθοκανονική ακολουθία του H , τότε τα παρακάτω είναι ισοδύναμα.

(i) Η ακολουθία $(\mathbf{e}_i)$ είναι ορθοκανονική βάση.

(ii) Αν $\langle \mathbf{h}, \mathbf{e}_i \rangle = 0$ για κάθε $i = 1, 2, \dots$ τότε $\mathbf{h} = \mathbf{0}$.

(iii) $\mathbf{h} = \sum_{i=1}^{\infty} \langle \mathbf{h}, \mathbf{e}_i \rangle \mathbf{e}_i$ για κάθε $\mathbf{h} \in H$.

Θ2. α) Έστω ο χώρος $L^2[a, b]$ και μια συνάρτηση $f \in C[a, b]$. Ορίζουμε την απεικόνιση: $M_f : L^2[a, b] \rightarrow L^2[a, b]$, $(M_f \varphi)(x) = f(x)\varphi(x)$. Να δείξετε ότι η M_f είναι φραγμένος τελεστής με $\|M_f\| = \|f\|_{\infty}$.

β) Αν $T, S \in \mathcal{B}(X, Y)$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ τότε ο $\lambda T + \mu S$ είναι φραγμένος τελεστής.

γ) Αν $T, S \in \mathcal{B}(X)$ τότε $ST \in \mathcal{B}(X)$ και $\|ST\| \leq \|S\| \|T\|$.

Θ3. α) Να δείξετε ότι η απεικόνιση $A \rightarrow A^* : \mathcal{B}(H) \rightarrow \mathcal{B}(H)$ ικανοποιεί τις ιδιότητες:

(i) $\|A^*A\| = \|A\|^2$ (ii) $(AB)^* = B^*A^*$ (iii) $\overline{\text{Im}A^*} = (\ker A)^{\perp}$ και να δείξετε ότι αν ο $A \in \mathcal{B}(H)$ είναι αυτοσυζυγής τότε $H = \ker A \oplus \overline{\text{Im}A}$.

β) Να βρείτε την νόρμα του πίνακα $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$.

Θ4. Έστω H ένας χώρος Hilbert και $T \in \mathcal{B}(H)$ ένας φραγμένος τελεστής επί του H .

α) Να ορίσετε τότε ο T λέγεται:

i) Φυσιολογικός, ii) Ορθομοναδιαίος, iii) Ισομετρία iv) θετικός.

β) Να δείξετε ότι ο T είναι ισομετρία, αν και μόνο αν $T^*T = I$.

γ) Στον χώρο $L^2(0, 1)$ δίνεται ο τελεστής $Tf(x) = 3xf(1 - x^3)$. Να εξετάσετε αν ο T είναι ισομετρία.

Θ5. Έστω H ένας άπειρης διάστασης χώρος Hilbert, $A \in \mathcal{B}(H)$ ένας φραγμένος τελεστής επί του H και A^* ο Hilbert συζυγής του A .

α) Να ορίσετε τότε ο τελεστής $A \in \mathcal{B}(H)$ λέγεται συμπαγής.

β) Να δείξετε ότι ο A είναι συμπαγής αν και μόνο αν ο A^* είναι συμπαγής.

γ) Να δείξετε ότι αν $A \in \mathcal{B}(H)$ είναι συμπαγής τότε για κάθε ορθοκανονική ακολουθία $(\mathbf{x}_n)$ ισχύει:

(i) $\langle A\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_n \rangle \rightarrow 0$. (ii) $\|A\mathbf{x}_n\| \rightarrow 0$.

δ) Δίνεται ο τελεστής $T \in \mathcal{B}(\ell_2)$: $T(x_1, x_2, x_3, \dots) = (x_1, 0, x_3, 0, x_5, 0, \dots)$. Να εξετάσετε αν ο T είναι συμπαγής.

Θ6. Να διατυπώσετε και να αποδείξετε τη δεύτερη μορφή του φασματικού θεωρήματος για έναν αυτοσυζυγή συμπαγή τελεστή $A \in \mathcal{B}(H)$.

Τα θέματα είναι ισοδύναμα. Για το άριστα απαιτούνται τέσσερα ολοκληρωμένα θέματα. Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ