Σ.Ε.Μ.Φ.Ε 8ο Εξάμ. 2η εξέταση - επαναληπτική, Οκτώβριος 2007

Θεωρία Τελεστών

Ονοματεπώνυμο ....

Θ Ε Μ Α Τ Α

Θ1. Έστω H ένας μιγαδικός χώρος Hilbert.
α) Να δείξετε ότι για κάθε $x, y \in H$ ισχύει $|\langle x, y\rangle| \le \|x\|\,\|y\|$. Δείξτε ότι η ανίσωση ισχύει ως ισότητα αν και μόνο αν τα x, y είναι γραμμικώς εξαρτημένα.
β) Έστω $A \in \mathcal{B}(H)$, $A = A^*$ και ένα διάνυσμα $x \in H$ τέτοιο ώστε $\|x\| = 1$ και $\|Ax\| = \|A\|$.
(i) Χρησιμοποιώντας κατάλληλα το α) ερώτημα δείξτε ότι είναι $A^2x = \|A\|^2x$.
(ii) Έστω $y_0 = Ax - \|A\|x$. Δείξτε ότι είναι $Ay_0 = -\|A\|y_0$ και συμπεράνατε ότι θα είναι: είτε $Ax = \|A\|x$ είτε θα υπάρχει $y \in H$, $\|y\| = 1$ με $Ay = -\|A\|y$.

Θ2. Έστω X, Y χώροι με νόρμα και $T : X \to Y$ μια γραμμική απεικόνιση.

(i) Πότε λέμε ότι η T είναι φραγμένος τελεστής;

(ii) Για ένα φραγμένο τελεστή $T : X \to Y$ να δείξετε ότι είναι

$$\begin{aligned}\|T\| &= \sup\{\|T\mathbf{x}\| : \mathbf{x} \in X,\ \|\mathbf{x}\| = 1\} = \sup\left\{\frac{\|T\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} : \mathbf{x} \in X,\ \mathbf{x} \neq \mathbf{0}\right\} \\ &= \inf\{c > 0 : \|T\mathbf{x}\| \le c\|\mathbf{x}\| \quad \forall\, \mathbf{x} \in X\}.\end{aligned}$$

(iii) Να δείξετε ότι η ταυτοτική απεικόνιση $I : (c_{00}, \|\cdot\|_2) \to (c_{00}, \|\cdot\|_\infty)$ είναι φραγμένος τελεστής ενώ η αντίστροφη απεικόνιση $I^{-1} : (c_{00}, \|\cdot\|_\infty) \to (c_{00}, \|\cdot\|_2)$ δεν είναι φραγμένος τελεστής.

Θ3. α) (i) Έστω H ένας χώρος Hilbert και M, N κλειστοί υπόχωροι κάθετοι μεταξύ τους. Να δείξετε ότι και ο $M + N$ είναι επίσης κλειστός υπόχωρος.
(ii) Αν M είναι ένας κλειστός υπόχωρος του H δείξτε ότι είναι $H = M \oplus M^\perp$.
β) Έστω H, K χώροι Hilbert και $T \in \mathcal{B}(H, K)$. Να δείξετε ότι $\ker T = (\operatorname{Im} T^*)^\perp$, $\overline{\operatorname{Im} T} = (\ker T^*)^\perp$.

Θ4. α) Έστω X ένας χώρος με νόρμα και $P \in \mathcal{B}(X)$ ένας ταυτοδύναμος τελεστής. Δείξτε ότι οι υπόχωροι $\mathcal{R}(P), \ker(P)$ είναι κλειστοί και συμπληρωματικοί. Επί πλέον ότι ισχύει: $\ker(P) = \mathcal{R}(I - P)$ και $\ker(I - P) = \mathcal{R}(P)$.
β) Έστω H ένας χώρος Hilbert και $P \in \mathcal{B}(H)$ ένας ταυτοδύναμος τελεστής. Δείξτε ότι τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

1. Ο P είναι ορθογώνια προβολή.

2. $\|P\| = 1$.

3. $\ker(P) \perp \mathcal{R}(P)$.

Θ5. α) Έστω H ένας άπειρης διάστασης διαχωρίσιμος χώρος Hilbert και $A \in \mathcal{B}(H)$. Να δώσετε τον ορισμό του συμπαγή τελεστή και να αναφέρετε δυο ισοδύναμες προτάσεις της έννοιας αυτής. Να δείξετε ότι ο A είναι συμπαγής αν και μόνο αν ο A^*A είναι συμπαγής.

β) Έστω (e_n) μια ορθοκανονική ακολουθία του H και (a_n) μια φραγμένοι ακολουθία μιγαδικών αριθμών.
(i) Να δείξετε ότι ο τελεστής $Tx = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \langle x, e_n\rangle e_n$ είναι φραγμένος με $\|T\| = \sup_n |a_n|$.

(ii) Να δείξετε ότι αν $a_n \to 0$ τότε ο T είναι συμπαγής.

Τα θέματα είναι ισοδύναμα. Για το άριστα απαιτούνται τέσσερα ολοκληρωμένα θέματα. Διάρκεια εξέτασης 2 ώρες και 45 λεπτά.