Σ.Ε.Μ.Φ.Ε 8ο Εξάμ. 2η εξέταση - Σεπτέμβριος 2004
Θεωρία Τελεστών

Θ Ε Μ Α Τ Α

Θ1. α) (i) Έστω H χώρος Hilbert, $\{\mathbf{e}_i : \; i = 1, 2, ..., n\}$, ένα πεπερασμένο ορθοκανονικό υποσύνολο και $\mathbf{h} \in H$. Αν $a_i = \langle \mathbf{h}, \mathbf{e}_i \rangle$, $i = 1, 2, ..., n$ να δείξετε ότι ισχύει: $\sum_{i=1}^{n} |a_i|^2 \leq \|\mathbf{h}\|^2$.

(ii) Έστω $\{\mathbf{e}_i : \; i = 1, 2, ...\}$ μία ορθοκανονική ακολουθία και $\mathbf{h} \in H$. Δείξτε ότι η σειρά $\sum_{i=1}^{\infty} a_i \mathbf{e}_i \equiv \sum_{i=1}^{\infty} \langle \mathbf{h}, \mathbf{e}_i \rangle \mathbf{e}_i$ συγκλίνει σ' ένα $\mathbf{h}' \in H$, τέτοιο ώστε: $\mathbf{h} - \mathbf{h}' \perp \mathbf{e}_i \; \forall \, i = 1, 2, ...$

β) Δείξτε ότι για δύο υποχώρους M, N ενός χώρου Hilbert H, ισχύουν:
(α) $(M + N)^{\perp} = M^{\perp} \cap N^{\perp}$ (β) $(M \cap N)^{\perp} = \overline{M^{\perp} + N^{\perp}}$.

Θ2. α) Έστω X, Y χώροι με νόρμα και $T : X \to Y$ μία γραμμική απεικόνιση. Δώστε τον ορισμό της έννοιας «T φραγμένος τελεστής» και αιτιολογείστε ότι η νόρμα $\|T\|$ του T εξαρτάται από τις νόρμες των χώρων X, Y.

β) Έστω H χώρος Hilbert, $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ...\}$ μία ορθοκανονική βάση του H και $(\lambda_n)_n$ μία φραγμένη ακολουθία μιγαδικών αριθμών. Ορίζουμε την απεικόνιση:

$$T\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_i \rangle \mathbf{e}_i,$$

για κάθε $\mathbf{x} \in H$. Να δείξετε ότι η T είναι γραμμική, είναι φραγμένος τελεστής και να υπολογίσετε την νόρμα του.

Θ3. α) Να δείξετε ότι:

(i) Αν T, S είναι φραγμένοι τελεστές και $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ τότε και ο $\lambda T + \mu S$ είναι φραγμένος τελεστής. Επί πλέον η συνάρτηση

$$\| \cdot \| : \; \mathcal{B}(X, Y) \to \mathbb{R}_+ : \quad T \to \|T\| = \sup\{\|Tx\| : \; x \in X, \; \|x\| \leq 1\},$$

ορίζει μία νόρμα στον $\mathcal{B}(X, Y)$.

(ii) Αν $T \in \mathcal{B}(X, Y)$, $S \in \mathcal{B}(Y, Z)$ τότε $ST \in \mathcal{B}(X, Z)$ και $\|ST\| \leq \|S\| \, \|T\|$.

(iii) Αν E είναι διανυσματικός χώρος με νόρμα και $A \in \mathcal{B}(E)$ τότε ισχύει $\|A^n\| \leq \|A\|^n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

β) (i) Έστω X, Y χώροι με νόρμα και $A \in \mathcal{B}(X, Y)$. Πότε ο τελεστής A λέγεται αντιστρέψιμος;

(ii) Έστω X ένας χώρος Banach και $T \in \mathcal{B}(X)$. Να δείξετε ότι ο T είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν είναι κάτω φργμένος και έχει πυκνό σύνολο τιμών ($\overline{\mathrm{Im\,T}} = X$).

(iii) Έστω H ένας χώρος Hilbert και $T \in \mathcal{B}(H)$. Να δείξετε ότι, αν οι T, T^* είναι κάτω φραγμένοι, τότε ο T είναι αντιστρέψιμος.

Θ4. α) (i) Έστω H, K δύο χώροι Hilbert και $A \in \mathcal{B}(H, K)$. Δείξτε ότι υπάρχει μοναδικός τελεστής $A^* : K \to H, \; A^* \in \mathcal{B}(K, H)$ τέτοιος, ώστε:

$$\langle A\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, A^*\mathbf{y} \rangle \quad \forall \; \mathbf{x} \in H, \; \forall \; \mathbf{y} \in K, \quad \text{με} \quad \|A^*\| = \|A\|.$$

(ii) Να δείξετε ότι $\|A^*A\| = \|A\|^2$

β) Έστω H ένας χώρος Hilbert και $P \in \mathcal{B}(H)$ ένας ταυτοδύναμος τελεστής. Να δείξετε ότι τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

1. Ο P είναι ορθογώνια προβολή.

2. Ο P είναι αυτοσυζυγής.

Θ5. α) Έστω H ένας χώρος Hilbert. Πότε ένας τελεστής $A \in \mathcal{B}(H)$ λέγεται συμπαγής; Να δείξετε ότι το σύνολο των συμπαγών τελεστών $\mathcal{K}(H)$ είναι δίπλευρο ιδεώδες του $\mathcal{B}(H)$ και ισχύει $A \in \mathcal{K}(H) \Leftrightarrow A^* \in \mathcal{K}(H)$.

β) (i) Να δείξετε ότι αν $A \in \mathcal{B}(H)$ είναι συμπαγής τότε για κάθε ορθοκανονική ακολουθία $(\mathbf{x}_n)$ ισχύει $\langle A\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_n \rangle \to 0$.

(ii) Να βρεθεί η νόρμα του πίνακα $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, θεωρώντας τον ως τελεστή επί του $\mathbb{C}^2$ με το κανονικό εσωτερικό γινόμενο.

Τα θέματα είναι ισοδύναμα. Για το άριστα απαιτούνται τέσσερα ολοκληρωμένα θέματα. Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ