Σ.Ε.Μ.Φ.Ε 8ο Εξάμ. 2η εξέταση (επαναληπτική) - Σεπτέμβριος 2005
Θεωρία Τελεστών

Ονοματεπώνυμο ....

Θ Ε Μ Α Τ Α

Θ1. α) Έστω M ένας κλειστός υπόχωρος ενός άπειρης διάστασης μιγαδικού χώρου Hilbert H. Να δείξετε ότι:
(i) $H = M \oplus M^{\perp}$.
(ii) $M = M^{\perp\perp}$.
β) Δείξτε ότι το ορθογώνιο συμπλήρωμα του υπόχωρου του ℓ_2, που παράγεται από το διάνυσμα $\mathbf{x}_0 = (1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{27}...)$, είναι ο υπόχωρος $\overline{[\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ...]}$, όπου $\mathbf{x}_i = (\underbrace{0, ..., 0}_{i-1 \text{ φορές}}, 1, 3, 0, ...)$. Κατόπιν να εκφράσετε το τυχόν διάνυσμα $\mathbf{x} \in \ell_2$ ως άθροισμα $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$, όπου $\mathbf{x}_1 \in [\mathbf{x}_0]$ και $\mathbf{x}_2 \in \overline{[\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ...]}$.

Θ2. Έστω ο χώρος ℓ_2 με τη συνηθισμένη βάση $(\mathbf{e}_n)$, η ακολουθία $a = (a_n)$ μιγαδικών αριθμών και η απεικόνιση $T_a : \ell_2 \to \ell_2$ με $T_a(\mathbf{x}) = (a_1 x_1, a_2 x_2, ...)$. Να δειχθεί ότι ο T_a είναι φραγμένος τελεστής αν και μόνο αν η ακολουθία (a_n) είναι φραγμένη. Να δειχθεί οτι ισχύει $\|T_a\| = \sup_n |a_n|$ και $T_a \mathbf{e}_n = a_n \mathbf{e}_n$.

Θ3. Έστω H, K χώροι Hilbert και μια απεικόνιση

$$\varphi : \ H \times K \to \mathbb{C}.$$

Να ορίσετε πότε η φ θα λέγεται **ημιαντι-διγραμμική μορφή (sesquilinear)**.
Έστω H, K χώροι Hilbert. Να δείξετε ότι:

(i) Αν $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ τότε η απεικόνιση $\varphi_A(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \langle A\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ είναι μια φραγμένη ημιαντι-διγραμμική μορφή.

(ii) Κάθε φραγμένη ημιαντι-διγραμμική μορφή προκύπτει μ΄ αυτόν τον τρόπο.

Θ4. (i) Να ορίσετε την έννοια του Hilbert-συζυγή A^* ενός φραγμένου τελεστή $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ και να δείξετε ότι ισχύει $\|A^*\| = \|A\|$.
(ii) Έστω ο χώρος $L^2[a, b]$ και μια συνάρτηση $f \in C[a, b]$. Ορίζουμε την απεικόνιση:

$$M_f : \ L^2[a, b] \to L^2[a, b], \ (M_f \varphi)(x) = f(x)\varphi(x).$$

Να δείξετε ότι η M_f είναι φραγμένος τελεστής και να βρείτε τον συζυγή του.

Θ5. Έστω X ένας χώρος με νόρμα και $P \in \mathcal{B}(X)$ ένας φραγμένος τελεστής.
(i) Πότε ο τελεστής P λέγεται ταυτοδύναμος; Να δείξετε ότι αν ο $P \in \mathcal{B}(X)$ είναι ένας ταυτοδύναμος τελεστής, τότε οι υπόχωροι $\mathcal{R}(P)$ (σύνολο τιμών) και $\ker(P)$ (πυρήνας) είναι κλειστοί και συμπληρωματικοί.
(ii) Έστω H ένας χώρος Hilbert και M ένας κλειστός υπόχωρός του. Να δώσετε τον ορισμό της ορθής προβολής P_M του H επί του M. Να δείξετε ότι η ορθή προβολή P_M είναι συνεχής (φραγμένος τελεστής) με $\|P_M\| = 1$.

Θ6. (i) Έστω $T \in \mathcal{B}(H, K)$. Πότε ο τελεστής T λέγεται τάξης n; Να δείξετε ότι αν $T \in \mathcal{B}(H, K)$ είναι ένας τελεστής τάξης n, τότε υπάρχουν γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_n\}$ του H, $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, ..., \mathbf{f}_n\}$ του K, τέτοια ώστε: $Tx = \sum_{i=1}^{n} \langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_i \rangle \mathbf{f}_i$, για κάθε $\mathbf{x} \in H$. (Ένα από τα δύο σύνολα διανυσμάτων μπορεί να επιλεγεί ορθοκανονικό)
(ii) Να δώσετε τον ορισμό του συμπαγούς τελεστή. Έστω ο τελεστής $W = SD$, όπου S, D οι τελεστές στον ℓ_2, με
$S(x_1, x_2, ...) = (0, x_1, x_2, ...)$ και $D(x_1, x_2, ...) = (x_1, 1/2x_2, 1/3x_3, ...)$. Δείξτε ότι ο W είναι συμπαγής και δεν έχει ιδιοτιμές, ενώ ο συζυγής του W^* έχει ιδιοτιμές.

Τα θέματα είναι ισοδύναμα. Για το άριστα απαιτούνται τέσσερα ολοκληρωμένα θέματα. Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ