

Ονοματεπώνυμο

Θ Ε Μ Α Τ Α

Θ1. Έστω H ένας χώρος Hilbert, $h \in H$ και $K \subseteq H$ ένα κλειστό και κυρτό υποσύνολο του H . Να δείξετε ότι υπάρχει $k \in K$ τέτοιο ώστε η απόσταση d , του h από το K , είναι: $d = d(h, K) = \|h - k\|$.

Θ2. Έστω $(X, \|\cdot\|), (Y, \|\cdot\|)$ δύο χώροι με νόρμα και $T : X \rightarrow Y$ μια γραμμική απεικόνιση. Να ορίσετε πότε ο T λέγεται φραγμένος τελεστής. Να δείξετε ότι αν ο T είναι φραγμένος τελεστής τότε ισχύει:

$$\|T\| = \sup\{\|Tx\| : x \in X, \|x\| = 1\} = \sup\left\{\frac{\|Tx\|}{\|x\|} : x \in X, x \neq 0\right\}.$$

Θ3. Έστω H ένας χώρος Hilbert και $T \in \mathcal{B}(H)$. Δείξτε ότι:

(i) $\mathcal{N}(T) = \mathcal{N}(T^*T)$ (όπου $\mathcal{N}(T)$ συμβολίζει τον πυρήνα του T).

Αν επιπλέον ο T έχει σύνολο τιμών $\mathcal{R}(T)$ κλειστό τότε ισχύουν:

(ii) Ο χώρος H γράφεται $H = \mathcal{N}(T) \oplus \mathcal{R}(T^*)$ (θεωρείστε γνωστό ότι «το $\mathcal{R}(T)$ κλειστό αν και μόνο αν το $\mathcal{R}(T^*)$ είναι κλειστό»).

(iii) $\mathcal{R}(T) = \mathcal{R}(T^*T)$ και $\mathcal{R}(T)$ κλειστό αν και μόνο αν το $\mathcal{R}(TT^*)$ είναι κλειστό.

Θ4. Έστω H ένας χώρος Hilbert. Να ορίσετε πότε ένας τελεστής $T \in \mathcal{B}(H)$ λέγεται:

(i) αυτοσυζυγής. (ii) φυσιολογικός.

Να δείξετε ότι κάθε τελεστής $T \in \mathcal{B}(H)$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ως $T = A + iB$, με A, B , αυτοσυζυγείς τελεστές. Να δείξετε ότι ο T είναι φυσιολογικός αν και μόνο αν ισχύει $AB = BA$.

Δείξτε ότι για ένα φυσιολογικό τελεστή T ισχύουν $\mathcal{N}(T) = \mathcal{N}(T^*)$, $\mathcal{R}(T) \cap \mathcal{N}(T) = \{0\}$.

Θ5. Έστω $H = L^2(0, 1)$ και ο γραμμικός τελεστής $Tf(x) = xf(1 - x^3)$. Να βρείτε τους τελεστές T^* , T^*T και κατόπιν τη νόρμα του T .

Θ6. α) Έστω H ένας διαχωρίσιμος χώρος Hilbert και $T \in \mathcal{B}(H)$. Πότε ο T λέγεται συμπαγής τελεστής; Να δείξετε ότι:

Ο T είναι συμπαγής αν και μόνο αν υπάρχει ακολουθία τελεστών πεπερασμένης τάξης, η οποία συγκλίνει, ως προς τη νόρμα, στον T , αν και μόνο αν ο T^* είναι συμπαγής.

Τα θέματα είναι ισοδύναμα. Για το άριστα απαιτούνται τέσσερα ολοκληρωμένα θέματα. Διάρκεια εξέτασης 2 ώρες και 45'.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ