Σ.Ε.Μ.Φ.Ε 8ο Εξάμ. 2η εξέταση - Σεπτέμβριος 2003

Θεωρία Τελεστών

Θ Ε Μ Α Τ Α

Θ1. Έστω H ένας χώρος Hilbert.

α) Αν M, N είναι υπόχωροι του H να δείξετε ότι $(M+N)^{\perp} = M^{\perp} \cap N^{\perp}$.

β) Αν M είναι κλειστός υπόχωρος του H, δείξτε ότι $H = M \oplus M^{\perp}$.

γ) Να δείξετε ότι το ορθογώνιο συμπλήρωμα του υπόχωρου του ℓ_2, που παράγεται από τα διανύσματα $\mathbf{x}_0 = (1, -1, 0, 0, ...)$, $\mathbf{y}_0 = (0, 1, -1, 0, 0, ...)$, είναι το σύνολο όλων των διανυσμάτων της μορφής $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_1, \xi_1, \xi_4, \xi_5, ...)$. Κατόπιν να εκφράσετε το τυχόν διάνυσμα $\mathbf{x} \in \ell_2$ ως άθροισμα $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$, όπου $\mathbf{x}_1 \in [\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0]$ και $\mathbf{x}_2 \in [\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0]^{\perp}$.

Θ2. α) Να δώσετε τον ορισμό της ορθοκανονικής βάσης σ΄ ένα χώρο Hilbert H και να δείξετε ότι ένα υποσύνολο $S = \{\mathbf{e}_i,\ i \in I\}$ είναι ορθοκανονική βάση του H αν και μόνο αν
i) S είναι ορθοκανονικό και ii) $\overline{[\mathbf{e}_i,\ i \in I]} = H$.

β) Να δείξετε ότι, αν M, N είναι κλειστοί υπόχωροι του H με ορθοκανονικές βάσεις $\{\mathbf{e}_i\}$, $\{\mathbf{f}_i\}$ αντίστοιχα, τότε το σύνολο $\{\mathbf{e}_i\} \cup \{\mathbf{f}_i\}$ είναι ορθοκανονική βάση του H.

Θ3. α) Έστω X, Y γραμμικοί χώροι με νόρμα και $T : X \to Y$ μία γραμμική απεικόνιση. Να δείξετε ότι η T είναι φραγμένος τελεστής αν και μόνο αν υπάρχει $k :\ 0 < k < +\infty$ με $\|T\mathbf{x}\| \leq k\|\mathbf{x}\|$ για κάθε $\mathbf{x} \in X$.

β) Έστω $a = (a_n)_n$ μία φραγμένη ακολουθία μιγαδικών αριθμών και $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ...) \in \ell_2$. Ορίζουμε την απεικόνιση:

$$A : \ell_2 \to \ell_2 : \quad A\mathbf{x} = (a_1x_1, a_2x_2, ..., a_nx_n, ...).$$

Να δείξετε ότι ο A είναι ένας γραμμικός φραγμένος τελεστής στον ℓ_2, με $\|A\| = \sup\limits_i |a_i|$ και αν $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, ...\}$ είναι η συνηθισμένη βάση του ℓ_2, τότε ισχύει

$$A\mathbf{e}_n = a_n\mathbf{e}_n,\ \forall\, n \geq 1.$$

γ) Θεωρούμε την απεικόνιση $T : C[0,1] \to \mathbb{C}$ με $Tf = f(0),\ f \in C[0,1]$. Να δείξετε ότι ο T είναι ένας γραμμικός φραγμένος τελεστής με $\|T\| = 1$.

Θ4. α) Να δώσετε τον ορισμό του (Hilbert) συζυγή ενός τελεστή $T \in \mathcal{B}(H, K)$ και τις βασικές του ιδιότητες.

β) Αν $T \in \mathcal{B}(H, K)$ να δειχθεί ότι

i) $\ker T = (\mathrm{Im} T^*)^{\perp}$, ii) $\overline{\mathrm{Im} T} = (\ker T^*)^{\perp}$ και iii) $\ker T^* = \{\mathbf{0}\} \Leftrightarrow \overline{\mathrm{Im} T} = K$.

Θ5. Έστω H ένας χώρος Hilbert.

α) Αν M, N είναι κλειστοί υπόχωροι και P, Q οι αντίστοιχες ορθές προβολές, να δείξετε ότι τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:
i) $P \leq Q$ ii) $\|P\mathbf{x}\| \leq \|Q\mathbf{x}\|$ για κάθε $\mathbf{x} \in H$ iii) $M \subseteq N$.

β) Αν $A \in \mathcal{B}(H)$ να δείξετε ότι

i) $AA^* = A^*A \Leftrightarrow \|A\mathbf{x}\| = \|A^*\mathbf{x}\|$, ii) ο A είναι ορθομοναδιαίος $\Leftrightarrow \|A\mathbf{x}\| = \|A^*\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\|$
για κάθε $\mathbf{x} \in H$.

Θ6. Έστω H διαχωρίσιμος χώρος Hilbert και $\mathcal{K}(H)$ το σύνολο των συμπαγών τελεστών επί του H.

α) Να δειχθεί ότι ο $A \in \mathcal{K}(H)$, αν και μόνο αν υπάρχει ακολουθία τελεστών πεπερασμένης τάξης, η οποία συγκλίνει, ως προς την τοπολογία της νόρμας, στον A.

β) $A \in \mathcal{K}(H) \Leftrightarrow A^* \in \mathcal{K}(H)$.

γ) Έστω $A : \ell_2 \to \ell_2 : \quad A\mathbf{x} = (x_1, (1/2)x_2, ..., (1/n)x_n, ...)$. Να δείξετε ότι ο A είναι συμπαγής.

Τα θέματα είναι ισοδύναμα. Για το άριστα απαιτούνται τέσσερα ολοκληρωμένα θέματα. Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ