

Σ.Ε.Μ.Φ.Ε 8ο Εξάμ. 2η εξέταση - επαναληπτική. Σεπτέμβριος 2009
Θεωρία Τελεστών

Ονοματεπώνυμο

Θ Ε Μ Α Τ Α

Θ1. Έστω H είναι ένας χώρος Hilbert και $A \in \mathcal{B}(H)$.

- (i) Να ορίσετε τον συζυγή A^* του A . Πότε ο A λέγεται αυτοσυζυγής;
- (ii) Αν ο A είναι αυτοσυζυγής να δείξετε ότι είναι $H = \ker A \oplus \overline{\operatorname{Im} A}$.
- (iii) Να δείξετε ότι: Ο A είναι αυτοσυζυγής, αν και μόνο αν $\langle Ax, x \rangle \in \mathbb{R}$, για κάθε $x \in H$.

Θ2. Έστω X ένας χώρος με νόρμα και $P \in \mathcal{B}(X)$ ένας ταυτοδύναμος τελεστής.

- α) (i) Να δείξετε ότι οι υπόχωροι $\operatorname{Im} P$ και $\ker P$ είναι κλειστοί και συμπληρωματικοί.
- (ii) Ισχύει: $\ker P = \operatorname{Im} (I - P)$ και $\ker (I - P) = \operatorname{Im} P$.

β) Έστω H ένας απειροδιάστατος χώρος Hilbert και $P \in \mathcal{B}(H)$ ένας ταυτοδύναμος τελεστής. Δείξτε ότι ο P είναι ορθογώνια προβολή, αν και μόνο αν ο P είναι αυτοσυζυγής.

Θ3. Έστω H είναι ένας χώρος Hilbert και $A \in \mathcal{B}(H)$. Να δώσετε τους ορισμούς:

- (i) ο A είναι πεπερασμένης τάξης.
- (ii) ο A είναι συμπαγής.
- (iii) Να δείξετε ότι το σύνολο των τελεστών πεπερασμένης τάξης δεν είναι κλειστό.
- (iv) Να δείξετε ότι αν ο A είναι συμπαγής και $B \in \mathcal{B}(H)$ τότε και οι τελεστές AB , BA είναι επίσης συμπαγείς.

Θ4. Έστω H είναι ένας χώρος Hilbert και $T \in \mathcal{B}(H)$.

- (i) Να δείξετε ότι: $\|T\| \leq 1 \Leftrightarrow I - T^*T \geq 0$.
- (ii) Για μια ακολουθία (x_n) του H ισχύει: $T^*x_n \rightarrow y$, $y \in H$. Να δείξετε ότι υπάρχει ακολουθία (y_n) του H τέτοια ώστε $T^*Ty_n \rightarrow y$.

Θ5. Θεωρούμε: H, K δύο χώρους Hilbert, $T \in \mathcal{B}(H, K)$ έναν τελεστή με κλειστό σύνολο τιμών $\mathcal{R}(T)$, την ορθή προβολή P του K επί του $\mathcal{R}(T)$ και ένα διάνυσμα $b \in K$. Για ένα $u \in H$ δείξτε ότι τα παρακάτω είναι ισοδύναμα

- (i) $Tu = Pb$.
- (ii) $\|Tx - b\| \geq \|Tu - b\|$ για κάθε $x \in H$.
- (iii) $T^*Tu = T^*b$.

Τα θέματα είναι ισοδύναμα. Για το άριστα απαιτούνται τέσσερα ολοκληρωμένα θέματα. Διάρκεια εξέτασης 2 ώρες και 45'.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ