Σ.Ε.Μ.Φ.Ε 8ο Εξάμ. 2η εξέταση - Επαναληπτική περίοδος 2010 (1–9–2010)

Θεωρία Τελεστών

Ονοματεπώνυμο ....

Θ Ε Μ Α Τ Α

Θ1. Έστω M ένας κλειστός υπόχωρος ενός χώρου Hilbert H. Να δείξετε ότι:

(i) $H = M \oplus M^{\perp}$.

(ii) $M = M^{\perp\perp}$.

Θ2.

(i) Έστω X, Y χώροι με νόρμα και $A \in \mathcal{B}(X, Y)$. Να ορίσετε πότε ο τελεστής A λέγεται αντιστρέψιμος.

(ii) Έστω X ένας χώρος Banach και $T \in \mathcal{B}(X)$.

α) Να δείξετε ότι ο T είναι αντιστρέψιμος, αν και μόνο αν είναι κάτω φραγμένος και έχει πυκνό σύνολο τιμών ($\overline{\mathrm{Im\,T}} = X$).

β) Να δείξετε ότι αν ο T είναι αντιστρέψιμος τότε οι τελεστές T, T^* είναι κάτω φραγμένοι.

Θ3. Έστω ο χώρος ℓ_2 με τη συνηθισμένη βάση $(\mathbf{e}_n)$, η ακολουθία $a = (a_n)$ μιγαδικών αριθμών και η απεικόνιση $T_a : \ell_2 \to \ell_2$ με $T_a(\mathbf{x}) = (a_1x_1, a_2x_2, ...)$. Να δειχθεί ότι $\lim\limits_{n}\|T_a^n\| = 0 \Leftrightarrow \sup\limits_{k}|a_k| < 1$.

Θ4. Έστω P, Q ορθογώνιες προβολές του $\mathcal{B}(H)$, (H χώρος Hilbert). Δείξτε ότι τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

(i) $PQ = P$.

(ii) $QPQ = P$.

(iii) $Q - P$ είναι ορθογώνια προβολή.

Θ5. **α)** Να ορίσετε πότε ο τελεστής $A \in \mathcal{B}(H)$, όπου H χώρος Hilbert, λέγεται συμπαγής.
β) Να δείξετε ότι τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

(i) Ο $A \in \mathcal{B}(H)$ είναι συμπαγής.

(ii) Το $\overline{A(S_1)}$ είναι συμπαγές, όπου $S_1 = \{\mathbf{x} \in H : \|\mathbf{x}\| \leq 1\}$.

(iii) Για κάθε φραγμένη ακολουθία $(\mathbf{x}_n)$ του H, η ακολουθία $(A\mathbf{x}_n)$ έχει μια συγλίνουσα υπακολουθία.

Τα θέματα είναι ισοδύναμα. Για το άριστα απαιτούνται τέσσερα ολοκληρωμένα θέματα. Διάρκεια εξέτασης 2 ώρες και 45′.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ