Βιογραφικό Σημείωμα

και Αναλυτικό Υπόμνημα Ερευνητικών Εργασιών

του Σωτηρίου Καρανάσιου

Αναπληρωτή Καθηγητή Ε.Μ. Πολυτεχνείου

Αθήνα 2010

Διευθυνση Εργασιας

Τομέας Μαθηματικών
Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών (Σ.Ε.Μ.Φ.Ε.)
Οδός Ηρώων Πολυτεχνείου 9, Ζωγράφου 15780, Αθήνα

e-mail: skaran@math.ntua.gr

Τηλέφωνο: 210 772 1776

Διευθυνση οικιας

Ρούμελης 84, Τ.Κ. 164 51 ΑΡΓΥΡΟΥΠΟΛΗ
Τηλέφωνο: 210 9929 487

Προσωπικα Στοιχεια

Ημερομηνία γέννησης:	4 Μαρτίου 1948.
Τόπος γέννησης:	Καρδίτσα, Ελλάδα.
Υπηκοότητα:	Ελληνική.
Οικογενειακή κατάσταση:	Παντρεμένος, με δύο κόρες.

Ερευνητικα Ενδιαφεροντα

Μη αυτοσυζυγείς Άλγεβρες Τελεστών. EP τελεστές. Γενικευμένοι αντίστροφοι, πολυωνυμικές προσεγγίσεις αντιστρόφων, παραγοντοποιήσεις τελεστών. Αριθμητικά πεδία πινάκων και τελεστών. Φασματική ανάλυση.

Τιτλοι Σπουδων

6/1978: **Master of Science (M.Sc.)(με διάκριση) στα Μαθηματικά.**
Ίδρυμα: Πανεπιστήμιο του Λονδίνου, King's Colledge.

6/1981: **Διδακτορικό Δίπλωμα στα Μαθηματικά.**
Ίδρυμα: Πανεπιστήμιο του Λονδίνου, King's Colledge.
Επιβλέπων: Καθηγητής J. A. Erdos.
Τίτλος: *Contributions to Non Self-djoint Operator Algebras.*

6/1971: **Πτυχίο Μαθηματικών.**
Ίδρυμα: Πανεπιστήμιο Αθηνών, Μαθηματικό Τμήμα.
Βαθμός: Λίαν καλώς.

Σπουδες Μετεκπαιδευσεις

10/66–06/71:	Φοιτητής του Μαθηματικού Τμήματος του Πανεπιστημίου Αθηνών.
10/77–06/78:	Μεταπτυχιακός Φοιτητής (M.Sc.) του Πανεπιστημίου του Λονδίνου, King's College.
10/78–06/81:	Μεταπτυχιακός Φοιτητής (Ph.D.) του Πανεπιστημίου του Λονδίνου, King's College.

Το 1966 αποφοίτησα από το Α′ Λύκειο Καρδίτσας και τον ίδιο χρόνο μετά από επιτυχείς εισαγωγικές εξετάσεις γράφτηκα στο μαθηματικό Τμήμα του Πανεπιστημίου Αθηνών
Μετά την εκλήρωση της στρατιωτικής μου θητείας (Ιούλιος 1971–Ιούλιος 1973) τον Ιανουάριο 1974 διορίστηκα ως έμμισθος Βοηθός στην Γ′ έδρα Ανωτέρων Μαθηματικών του Ε.Μ. Πολυτεχνείου.
Με εννεάμηνη εκπαιδευτική άδεια, που μου χορηγήθηκε από το Ε.Μ.Π. τον Οκτώβριο του 1977, άρχισα τον πρώτο κύκλο των μεταπτυχιακών μου σπουδών στην Αγγλία (Master of Science). Κατά τη διάρκεια αυτών των σπουδών παρακολούθησα, σε διάφορα κολλέγια του Πανεπιστημίου του Λονδίνου τα παρακάτω μαθήματα:

Μαθημα Κολλεγιο

1. Topological Groups:	King's College.
2. Operators on Hilbert spaces:	King's College.
3. Mesaure and Integration on locally compact spaces:	Birkbeck College.
4. Basic Functional Analyshs:	Chelsea College.
5. Compact Convex Sets and Real Banach spaces:	Chelsea College.
6. Theory of Probability:	Imperial College.

Τον Ιούνιο του 1978 μετά από επιτυχείς εξετάσεις πήρα το πτυχίο Master of Science με διάκριση. Από τον Οκτώβριο του 1978 μου χορηγήθηκε εκπαιδευτική άδεια για τρία ακαδημαϊκά έτη (Οκτώβριος μέχρι Ιούνιος: 1978-79, 1979-80, 1980-81 αντιστοίχως) για τη συνέχιση των σπουδών μου στην Αγγλία, στο (ίδιο) Πανεπιστήμιο του Λονδίνου. Με supervisor τον Καθηγητή J. A. Erdos άρχισα την ερευνητική δουλειά στην περιοχή της Θεωρίας Τελεστών και ειδικότερα στις μη αυτοσυζυγείς Άλγεβρες Τελεστών (Non sel-adjoint operator algebras). Σ′ αυτό το χρονικό διάστημα παρακολούθησα δύο ακόμη μαθήματα και αρκετές διαλέξεις σε σεμινάρια. Συγκεκριμένα:

Μαθημα Κολλεγιο

1. **Basic Alebra (Prof. McDonald):** Queen Mary College.
2. **Theory of C* Algebras (Prof Erdos):** King's College.

Σεμιναρια Διαλεξεις

1. **Jordan C* Algebras and Complex Analysis (Prof. Upmeies)**
2. **Almost fixed points (Prof. D.R. Smart)**
3. **Semigroups of operators (Prof. J. Goldstein)**
5. **Some invariant subspaces for subnormal operators (Prof. Jellett)**

Από το 1978 και σ' όλη τη διάρκεια του δεύτερου κύκλου των μεταπτυχιακών μου σπουδών (μέχρι το 1981) έπερνα ενεργά μέρος στο σεμινάριο που οργανώνονταν κάθε χρόνο στο King's College με θέματα σχετικά με τη Θεωρία Τελεστών. Στα πλαίσια αυτού του σεμιναρίου έδωσα κατά διαστήματα επτά διαλέξεις με θέματα:

Διαλεξεις

1. **H^p as a Banach space**
2. **Dissipative semigroups of operators on Hilbert spaces**
3. **Dissipative semigroups of operators on Banach spaces**
4. **Approximation of inverses**
5. **Quasitriangular operators**
6. **Approximation of inverses**
5. **The distance to upper triangular operators**

Τον Απρίλιο του 1981 υπέβαλα τη διδακτορική μου διατριβή στο Πανεπιστήμιο του Λονδίνου και την υποστήριξα με επιτυχία τον Ιούνιο του ίδιου έτους.
Από το 1988 μέχρι σήμερα συμμετέχω στο ερευνητικό σεμινάριο που οργανώνεται στον Τομέα της Ανάλυσης του Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Αθηνών με θέματα στην περιοχή της Θεωρίας Τελεστών.
Οι διδάκτορες του Πανεπιστημίου Αθηνών κ.κ. Ηλίας Κατσούλης και Εμμανουήλ Παπαδάκης εκφράζουν στον πρόλογο των διατριβών τους τις ευχαριστίες τους για την επιστημονική συνεργασία που είχαμε στα πλαίσια αυτού του σεμιναρίου.

Υποτροφιες - Διακρισεις

1966: **Α΄ Λύκειο Καρδίτσας.**
Έπαινος διότι αποφοίτησα με άριστα.

1967–68 και 1968–69: **Ίδρυμα Κρατικών Υποτροφιών.**
Υποτροφία λόγω υψηλής βαθμολογίας (8ος στον βαθμολογικό κατάλογο όλων των Τμημάτων της Φυσικομαθηματικής Σχολής του Πανεπιστημίου Αθηνών το ακαδ. έτος 1967-68).

6/79–6/81: **Διεύθυνση Τεχνικής βοήθειας, Υπουργείου Οικονομικών**
Υποτροφία για συνέχιση των μεταπτυχιακών μου σπουδών.

Πανεπιστημιακες θεσεις

03/10–σήμερα: **Καθηγητής**, Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών, Ε. Μ. Πολυτεχνείο.

06/98–03/10: **Αναπληρωτής Καθηγητής**, Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών, Ε. Μ. Πολυτεχνείο.

10/86–06/98: **Επίκουρος Καθηγητής**, Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών, Ε. Μ. Πολυτεχνείο.

07/82–10/86: **Λέκτορας**, Γενικό Τμήμα, Ε. Μ. Πολυτεχνείο.

02/82–07/82: **Μόνιμος Επιμελητής**, Ε. Μ. Πολυτεχνείο.

01/74–02/82: **Έμμισθος Βοηθός**, Ε. Μ. Πολυτεχνείο.

Διδακτική Εμπειρία

α. Προπτυχιακό Επίπεδο:	
1974–75–76–77:	δίδαξα τις Φροντιστηριακές Ασκήσεις των Ανωτέρων Μαθηματικών (διετούς κύκλου) στους Φοιτητές Α΄ και Β΄ έτους, σχεδόν όλων των Σχολών (κυκλικά) του Ε. Μ. Πολυτεχνείου, με εξαίρεση το ακαδημαϊκό έτος 1976-77, όπου επιπλέον δίδαξα και μέρος της θεωρίας του Μαθήματος «Ανώτερα Μαθηματικά ΙΙ» (στο εαρινό εξάμηνο και το μάθημα «Αναλυτική Γεωμετρία» (στο χειμερινό εξάμηνο).
1981–82 μέχρι και 1992–93:	έχω διδάξει (αυτοδύναμα) σε όλες τις Σχολές του Ε.Μ.Π. όλα τα Ανώτερα Μαθηματικά που διδάσκονται στο Πολυτεχνείο. Συγκεκριμένα: Διαφορικό και ολοκληρωτικό Λογισμό μιας και πολλών μεταβλητών, Διανυσματική Ανάλυση, Διαφορικές Εξισώσεις, Διαφορικές Εξισώσεις με Μερικές Παραγώγους, Μιγαδική Ανάλυση, Διαφορική Γεωμετρία, Γραμμική Άλγεβρα και Αναλυτική Γεωμετρία. Επίσης το κατ΄ επιλογήν μάθημα «Εφαρμοσμένη Συναρτησιακή Ανάλυση» στη Σχολή Ναυπηγών.
1993–94 και 1994–95:	δίδαξα στη Σχολή Αγρονόμων και Τοπογράφων Μηχανικών τα μαθήματα: Γραμμική άλγεβρα και Αναλυτική Γεωμετρία, και Συναρτήσεις Πολλών Μεταβλητών.
1995–96 μέχρι σήμερα:	διδάσκω στη Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών τα μαθήματα: «Γραμμική Άλγεβρα» και «Μαθηματική Ανάλυση (Συναρτήσεις Πολλών Μεταβλητών, Διανυσματική Ανάλυση)».
2001 μέχρι σήμερα:	διδάσκω στη Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών τα μαθήματα: «Αναλυτική Γεωμετρία και Γραμμική Άλγεβρα» (1ο Εξάμηνο) και «Θεωρία Τελεστών» (8ο Εξάμηνο).
β. Μεταπτυχιακό Επίπεδο:	
1995–96–97, 1998–99–00–01–02–03:	Στο θεσμοθετημένο Μεταπτυχιακό Πρόγραμμα **«Μαθηματικά» ΦΕΚ 1002/24–9–1998** του Τομέα Μαθηματικών, το μάθημα «Θεωρία Τελεστών».
2005-06–07–08:	Στο θεσμοθετημένο Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών **«Εφαρμοσμένες Μαθηματικές Επιστήμες» ΦΕΚ 1058/27–7–2005** το μάθημα «C^* Άλγεβρες και Θεωρία Τελεστών».

Επιβλεψη Διδακτορικων και Μεταπτυχιακων Εργασιων

09/2001–07/2006: Δημήτριος Παππάς, Διδακτορική Διατριβή με θέμα *Γενικευμένοι Αντίστροφοι και Άλγεβρες Τελεστών*, ολοκληρώθηκε.

11/2008–σήμερα: Αθανάσιος Κωστόπουλος, Διδακτορική Διατριβή με θέμα *EP Τελεστές και Ψευδοφάσμα*, σε εξέλιξη.

2001: Δ. Παππάς, Μεταπτυχιακή Εργασία με τίτλο *Nest, Nest Άλγεβρες και διαγώνια στοιχεία συμπαγών Τελεστών.*

2005: Γ. Α. Αφένδρας, Μεταπτυχιακή Εργασία με τίτλο *Nest Άλγεβρες και Τριγωνική Ολοκλήρωση.*

2007: Δ. Α. Κόκκορης, Μεταπτυχιακή Εργασία με τίτλο *Θέματα C* Αλγεβρών.*

2008: Α. Κωστόπουλος, Μεταπτυχιακή Εργασία με τίτλο *Γενικευμένοι Αντίστροφοι-EP τελεστές.*

Μελος τριμελων επιτροπων εκπονησης Ph.D

2005: Αλέξανδρος Παππάς, Διδακτορική Διατριβή. Θέμα: *Πλειογραμμικές Απεικονίσεις και πολυώνυμα σε χώρους Banach*, ολοκληρώθηκε.

27/01/2005–... Θ. Ραϊκόφτσαλης, Διδακτορική Διατριβή. Θέμα: *Μελέτη ιδαζουσών δομών σε χώρους Banach.*

20/11/2005–... Δ. Τάταρης, Διδακτορική Διατριβή. Θέμα: *Έκρηξη Λύσεων ορισμένων μη τοπικών προβλημάτων.*

09/02/2006–... Α. Καβατζικλής, Διδακτορική Διατριβή. Θέμα: *Πλειογραμμικοί Τελεστές σε απειροδιάστατους χώρους.*

12/10/2006–... Α. Αρετάκη, Διδακτορική Διατριβή. Θέμα: *Φασματοσκοπική Ανάλυση των Γραμμικών Εκφραζομένων Πινάκων.*

20/9/2007–... Χ. Χωριανόπουλος, Διδακτορική Διατριβή. Θέμα: *Αριθμητικά Πεδία Τελεστών.*

Μελος επταμελων επιτροπων εξετασης Ph.D

α. Στο Ε.Μ. Πολυτεχνείο :

2001: Μαρία Αδάμ, με τίτλο: *Αριθμητικά Πεδία Πινάκων Ειδικής Μορφής.*

2003: Παντελής Δοδός - Ντοντός, με τίτλο: *Συμβολές στη μη Λεία και Πλειότιμη Ανάλυση.*

2008: Γ. Πετσούλας, με τίτλο: *Το θεώρημα KRIVINE και χώροι Banach τύπου TSIRELSON.*

2009: Ν. Παπαθανασίου, με τίτλο: *Φασματικές Διαταραχές Πλυωνυμικών Πινάκων.*

β. Σε άλλα Πανεπιστήμια:

Παν/μιο Αθηνών 2007: Γ. Ελευθεράκης, με τίτλο *Αναπαραστάσεις Αλγεβρών και Διαγώνιων Προτύπων.*

Μελος τριμελων επιτροπων εξετ. Μεταπτ. Διπλ. Εργασιων.

2002: Β. Αναγνωστόπουλος, Διπλωματική Μεταπτυχιακή Εργασία. Τίτλος: *Crossnorms και πλειογραμμική Άλγεβρα.*

2005: Α. Παππάς, Διπλωματική Μεταπτυχιακή Εργασία. Τίτλος: *Πλειογραμμικές Απεικονίσεις και πολυώνυμα σε χώρους Banach.*

2006: Α. Αρετάκη, Διπλωματική Μεταπτυχιακή Εργασία. Τίτλος: *L και P ιδιότητες των Πινάκων.*

2006: Δ. Διαμαντίδης, Διπλωματική Μεταπτυχιακή Εργασία. Τίτλος: *Η κυρτότητα του σύνθετου Αριθμητικού Πεδίου Πινάκων.*

2007: Α. Μπίντζας, Διπλωματική Μεταπτυχιακή Εργασία. Τίτλος: *Το γραμμικό Υπόδειγμα Παραγωγής Leontief και στοιχεία Γραμμικού Υποδείγματος σε απειροδιάστατες οικονομίες*

2007: Α. Αναστασοπούλου, Διπλωματική Μεταπτυχιακή Εργασία. Τίτλος: *Ισορροπία σε παίγνια πλήρους πληροφόρισης.*

2007: Ε. Κωστόπουλος, Διπλωματική Μεταπτυχιακή Εργασία. Τίτλος: *Θετικές Βάσεις και Ασφάλιση Χαρτοφυλλακίων.*

2008: Α-Σ Αλαξανδράτου, Διπλωματική Μεταπτυχιακή Εργασία. Τίτλος: *Δυναμική Αντιστάθμιση Παραγώγων σε διακριτό Χρονικό ορίζοντα.*

2008: Σ. Σαμαράς, Διπλωματική Μεταπτυχιακή Εργασία. Τίτλος: *Πολυωνυμικοί Πίνακες και Εφαρμογές.*

Συγγραφικο Εργο

Έχω συγγράψει τέσσερα (τρία με άλλους συγγραφείς) διδακτικά βιβλία τα οποία, με απόφαση του Τομέα Μαθηματικών Ε.Μ.Π. διανέμονται στους φοιτητές διαφόρων Σχολών του Ε.Μ.Π.. Διανέμονται επίσης με αντίστοιχες αποφάσεις και σε Τμήματα των Πανεπιστημίων: Στερεάς Ελλάδος, Θεσσαλίας, Κρήτης, Αιγαίου και ΤΕΙ Χαλκίδος.

Τα βιβλία αυτά είναι:

1. «Γραμμική Άλγεβρα και Στοιχεία Αναλυτικής Γεωμετρίας» (από κοινού με τον Αν. Καθηγητή Ν.Καδιανάκη), (1998) σελίδες 431.
2. «Ανάλυση ΙΙ - Συναρτήσεις Πολλών Μεταβλητών» (από κοινού με τους Αν. Καθηγητές Ν. Καδιανάκη και Α. Φελλούρη), (2001) σελίδες 564.
3. «Γραμμική Άλγεβρα Αναλυτική Γεωμετρία και Εφαρμογές» (από κοινού με τον Αν. Καθηγητή Ν. Καδιανάκη), (2003) σελίδες 565.
4. «Θεωρία Τελεστών και Εφαρμογές», (2009) σελίδες 262.

Διοικητικο Εργο

Στα πλαίσια τόσο του τ. Γενικού Τμήματος και της Σχολής ΕΜΦΕ, όσο και του Τομέα μαθηματικών έχω πλαισιώσει διάφορες Επιτροπές είτε ως μέλος είτε ως συντονιστής. Επιπροσθέτως

α. Στη Σχολή ΕΜΦΕ

- Εκλέγομαι επί σειρά ετών μέλος της Γενικής Συνέλευσης της Σχολής.
- Ήμουν μέλος της Επιτροπής Προπτυχιακών Σπουδών της Σχολής και μέλος της Επιτροπής σύνταξης του Οδηγού Σπουδών.

β. Στον Τομέα Μαθηματικών

- 2003-04 και 2004-05: Διευθυντής του Τομέα Μαθηματικών.
- 2005–σήμερα: Διευθυντής του Δ.Π.Μ.Σ. «Εφαρμοσμένες Μαθηματικές Επιστήμες»
- Είμαι μέλος της Επιτροπής Μεταπτυχιακών Σπουδών και της Επιτροπής Οικονομικών.

Ερευνητικα Προγραμματα

1. Επιστημονικός Υπεύθυνος του Προγράμματος Βασικής έρευνας «*Πλειγραμμικοί Τελεστές, Γενικευμένοι Αντίστροφοι Τελεστών - Αριθμητικά Πεδία Τελεστών*», Πρωταγόρας Ε.Μ.Π. 2004-2006.

2. Μέλος της ερευνητικής ομάδας του πρόγραμματος «*Μελέτη μη Αυτοσυζυγών Προβλημάτων: Θεωρία, Αλγόριθμοι και Εφαρμογές στη Μαθηματική Φυσική και στην Επιστήμη του Μηχανικού*», ΕΠΕΑΕΚ ΙΙ, *Πυθαγόρας ΙΙ*, 2005–2007.

3. Μέλος της ερευνητικής ομάδας του πρόγραμματος «*Πολυωνυμικοί Τελεστές σε Απειροδιάστατους χώρους*», Καραθεοδωρή, Ε.Μ.Π. 2007–2009.

Αλλες Επιστημονικες Δραστηριοτητες

1. Visiting fellow στο King's College του Πανεπιστημίου του Λονδίνου (Απρίλιος 1988 εως και Αύγουστος 1988).

2. Συμμετοχή στο πρόγραμμα «Μαθηματική υποδομή για τη σύγχρονη Τεχνολογία» της συνεχιζόμενης εκπαίδευσης, όπου δίδαξα το μάθημα «Γραμμική Άλγεβρα και Εφαρμογές».

3. Συμμετοχή στο πρόγραμμα «Socrates» ανταλλαγής διδακτικού προσωπικού. Συνεργασία Ε.Μ. Πολυτεχνείου και Πανεπιστημίου του Λονδίνου (King's College).

ΔΗΜΟΣΙΕΥΣΕΙΣ

[Δ0] S. Karanasios *Contributions to non self-adjoint algebras.* Ph.D., King's College, University of London, London, 1981.

[Δ1] S. Karanasios. Pertubations of a nest algebra module. *Math. Proc. Camb. Phil.*, **93** (1983), 303–306.

[Δ2] S. Karanasios. Full operators and Approximation of inverses. *J. London Math. Soc.*, **30**, (2) (1984), 295–304.

[Δ3] S. Karanasios. On certain commuting families of rank one operators. *Proc. Edinb. Math. Soc.*, **27** (1984), 115–129.

[Δ4] S. Karanasios. Triangular integration with respect to a nest algebra module. *Indiana Univ. Math. J.*, **34** (1985), 299–317.

[Δ5] S. Karanasios. Nest space decomposition for an operator in C_ω. *Bulletin of the Greek Math. Soc.*, **29** (1988), 99–102.

[Δ6] S. Karanasios. The module factorization of operators on Hilbert spaces. *J. Math. Analysis and Applications*, **142**, (1), (1989), 95–100.

[Δ7] S. Karanasios. Full operators on reflexive Banach spaces. *Bulletin of the Greek Math. Soc.*, **36** (1994), 81–86.

[Δ8] S. Karanasios. Partial isometries and extreme points of certain operator algebras. *J. Algebras Groups and Geometries*, **13** (1996), 489–498.

[Δ9] S. Karanasios. Factorization with respect to a commutative subspace lattice. *J. Japonica Mathematica*, **47**, (2), (1998), 209–216.

[Δ10] S. Karanasios and J. Maroulas. On the minimal polynomial of an algebraic operator. *J. Algebras Groups and Geometries*, **16** (1999), 195–201.

[Δ11] S. Karanasios. On the nest algebra-module factorization. *FJMS*, **2**,(6), (2000), 973–978.

[Δ12] S. Karanasios and D. Pappas. Approximability of the generalized inverse of an operator. *J. of Institute of Mathematics and Computer Sciences*, **19**, No **1**,(2006), 73–77.

[Δ13] S. Karanasios and D. Pappas. Generalized inverses and special type Operator algebras. *J. Facta Univ. Series Math. Inform.*, **21** (2006), 41–48.

[Δ14] D. Drivaliaris, S. Karanasios and D. Pappas. Factorizations of EP Operators. *Linear Algebra and Applications*, **429** (2008), 1555–1567.

[Δ15] Christos Chorianopoulos, Sotirios Karanasios and Panayiotis Psarrakos. A definition of numerical range of rectangular matrices. *Linear and Multilinear Algebra*, Vol. **57**, **(5)**, (2009), 459–475.

[Δ16] D. Drivaliaris, S. Karanasios and D. Pappas. Polynomial Aproximation of the Moore-Penrose inverse. (in preparation)

Impact Factors 2007 / 2008

Linear Algebra and its Applications: ***0.878 /2008***

Journal Mathematical Analysis and Applications: ***1.046/2008***

Linear and Multilinear Algebra: ***0.471/2007***

Math. Proc.Camb. Phil.: ***0.449***

Journal London Math. Soc.: ***0.733/2007***

Proc. Edinb. Math. Soc.: ***0.529/2007***

Indiana Univ. Math. J.: ***0.866/2007***

Κριτης Επιστημονικων Περιοδικων

Linear Algebra and its Applications

Διοργανωση Συνεδριων

09/2004: 10ο Πανελλήνιο Συνέδριο Μαθηματικής Ανάλυσις, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο. Πρόεδρος Οργανωτικής Επιτροπής

Παρουσιασεις σε Συνεδρια

06/2009: Conference in Mathematical Analysis and its Applications. Nis, Serbia.
Τίτλος: *Polynomial approximation of the Moore–Penrose inverse of an operator (κεντρική ομιλία 40′).*

07/2008: The ninth Workshop on Numerical Ranges and Numerical radii, Department of Mathematics, College of William and Mary.
Τίτλος: *A definition of numerical range based on the Birkhoff-James orthogonality.*

04/2008: 12ο Πανελλήνιο Συνέδριο Μαθηματικής Ανάλυσις, Μαθηματικό Τμήμα, ΕΚΠΑ
Τίτλος: *Quasialgebraic Operators, Capacity and Inverse Approximation*

08/2006: 3*rd* International Conference of Applied Mathematics, Plovdiv, Βουλγαρία.
Τίτλος: *EP Operators and Approximation of generalized inverses.*

05/2006: 11ο Πανελλήνιο Συνέδριο Μαθηματικής Ανάλυσις, Μαθηματικό Τμήμα, Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης.
Τίτλος: *EP operators and generalized inverses.*

09/2004: 10ο Πανελλήνιο Συνέδριο Μαθηματικής Ανάλυσης, Εθνικό Μετσοβιο Πολυτεχνείο.
Τίτλος: *Approximation of generalized inverses of normal operators*

11/2004: 21ο Πανελλήνιο Συνέδριο Μαθηματικής Παιδείας, ΕΜΕ, Τρίκαλα.
Τίτλος: *Οι απαιτήσεις της Τριτοβάθμιας εκαπίδευσης και η ικανότητα των νεοεισερχομένων φοιτητών να τις αντιμετωπίσουν*

09/2002: 9ο Πανελλήνιο Συνέδριο Μαθηματικής Ανάλυσης, Πολυτεχνείο Κρήτης, Χανιά.
Τίτλος: *Αριθμητικά πεδία τελεστών και ασθενείς προσεγγίσεις*

11/1998: 15ο Πανελλήνιο Συνέδριο Μαθηματικής Παιδείας, ΕΜΕ, Χιος.
Τίτλος: *Η Μαθηματική Παιδεία στο Λύκειο και οι απαιτήσεις του Ε.Μ. Πολυτεχνείου (κεντρική ομιλία)*

09/1997: 6ο Πανελλήνιο Συνέδριο Μαθηματικής Ανάλυσης, Πανεπιστήμιο Αιγαίου, Σάμος.
Τίτλος: *Triangular integrals and operator factorizations*

09/1996: 5ο Πανελλήνιο Συνέδριο Μαθηματικής Ανάλυσης, Πανεπιστήμιο Κρήτης, Ηράκλειο.
Τίτλος: *The minimal polynomial of an algebraic operator.*

09/1996: Mathematical Analysis and its Applications, Ε. Μ. Πολυτεχνείο.

08/1996: Aegean Conference on Operator Algebras and Applications. Οργανωτές Πανεπιστήμια Αιγαίου και Αθήνας, Σάμος.
Τίτλος: *Some extreme points of certain operator algebras.*

07/1996: International Conference of Applied Analysis. Οργανωτές τα Πανεπιστήμια Αιγαίου, Αθηνών και το Ε.Μ. Πλολυτεχνείο, Σάμος.
Τίτλος: *Some applications of Full operators on reflexive Banach spaces.*

09/1994: 4ο Πανελλήνιο Συνέδριο Μαθηματικής Ανάλυσης, Πανεπιστήμιο Πατρών.
Τίτλος: *Operator factorizations with respect to a commutative subspace lattice of projections*

09/1992: 2ο Πανελλήνιο Συνέδριο Μαθηματικής Ανάλυσης, Μαθηματικό Τμήμα, ΕΚΠΑ.

09/1990: 1ο Πανελλήνιο Συνέδριο Μαθηματικής Ανάλυσης, Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης.
Τίτλος: *Partial isometries and extreme points in certain operator algebras.*

08/1985: International Conference in Operator Theory, Ε.Μ. Πολυτεχνείο.
Τίτλος: *Factorization along nest-agebra module.*

12/1983: 7th Balcan Congress of Mathematicians, Ε.Μ. Πολυτεχνείο.

03/2009: Ημερίδα Μαθηματικών, Περιφερειακή Διεύθυνση Α/βάθμιας και Β/βάθμιας Εκπ/σης Βορείου Αιγαίου.
Τίτλος: *Τα Μαθηματικά και οι σύγχρονες εξελίξεις των Επιστημών (κεντρική ομιλία 40′)*

Επιστημονικο Εργο στη Βαθμιδα

Στη Βαθμίδα του Αναπληρωτή Καθηγητή το επιστημονικό μου έργο αποτελείται από:

- Τις δημοσιευμένες εργασίες [Δ10], [Δ11], [Δ12], [Δ13], [Δ14] και [Δ15].
- Την υπό πρετοιμασία εργασία Polynomially approximation of the Moore-Penrose inverse(πρόκειται να υποβληθεί για δημοσίευση πολύ σύντομα. Βρίσκεται στο στάδιο της συγγραφής) [Δ16].
- Τη συγγραφή δύο διδακτικών βιβλίων.

Ετεροαναφορες

Υπάρχουν 21 ετεροαναφορές στο δημοσιευμένο ερευνητικό μου έργο, οι οποίες αναφέρονται αναλυτικά στον πίνακα που ακολουθεί.

Αναφορες στη Βιβλιογραφια

[1] G.J. Knowles. Numerical ranges and reduction theory *J. London Mathematical Soc.*, **29**, (2) (1984), 164–170. Αναφορά στην [Δ0].

[2] A.I. Loginov and V.S. Shulman. Invariant subspaces of operator algebras. *Journal Soviet Math.*, **1** (1991), 1977–1236. Αναφορά στην [Δ1].

[3] Zhe Dong. The existance of Maximal w*-closed Submodules in Nest Algebra Modules *Acta Mathematica Sinica*, **23**, (2), (2005), 193–200. Αναφορά στις [Δ4].

[4] I. Totorov. Bimodule over Nest Algebras and Deddens' Theorem. *Proccedings of the American Mathematical Society*, **27**, (6),(1999), 1771-1780. Αναφορά στην [Δ4].

[5-6] K.R. Davidson. *Nest Algebras: Pitman Research Notes in Mathematics.* Series: 191, 1988. Αναφορά στις [Δ2,Δ4].

[7] J. A. Erdos. Basis Theory and Operator Algebras. *Operator Algebras and Applications*, Series C: Mathematical and Physical Seiences, Vol. 495, by A. Katavolos . Αναφορά στην [Δ3].

[8] Extreme Points of the Jacobson Submodule. *Advances in Mathematics*, **32**, (5), (2003), 537–546. Αναφορά στην [Δ4].

[9] Dijana Mosic, Dragan Djordjevic and J.J. Koliha. EP elements in Rings. *Linear Algebra and its Applications*, **431**, (5-7), (2009), 527–535. Αναφορά στην [Δ14].

[10] D.S. Djordjevic, J.J. Koliha and I. Straskraba. Factorization of EP elements of C*-algebras. *Linear and Multilinear Algebra*, to appear. Αναφορά στην [Δ14].

[11-12] Dragan S. Djordjevic and Vladimir Racocevic. Lectures on Generalized inverses. *Faculty of Sciences and Mathematics (ISBN 978-86-83481-53-8*, Nis (2008). Αναφορά στις [Δ13, Δ14].

[13] V. Katsikis and D. Pappas. Fast computing of the Moore-Penrose inverse Matrix. *Electronic Journal of Linear Algebra*, **17**, (2008), 637–650 Αναφορά στην [Δ13].

[14] N. Matzakos and D. Pappas. EP Matrices: computation of the Moore-Penrose inverse via factorizations. *J. Appl. Math. Comput.*, (2009). Αναφορά στην [Δ14].

[15] V. Katsikis and D. Pappas. A new method on computing the Moore-Penrose inverse matrix. *NUMAN international conference*, Qalk'ida, 2008. Αναφορά στην [Δ13].

[16–19] Wilson Pacheco. OperadoresSemillenos y acotados por abajo en espacios de Banach. *XXII Jornadas De la Asociacion Mathematica*, San Cristobal (2009), AN 14, Aula D05, p. 20. Αναφορά στις [Δ2,Δ7, Δ12,Δ13].

[20–21] Edixo Rosales. Operadores LLenos en Espacios Uniformemente Convexos. Sobre Operadores de Toeplitz truncados. *XXII Jornadas De la Asociacion Mathematica*, San Cristobal (2009), AN 2, Aula D05, p. 16, (2009). Αναφορά στις [Δ2, Δ7].

Αναλυτικο Υπομνημα Ερευνητικων Εργασιων

CONTRIBUTIONS TO NON SELF-ADJOINT ALGEBRAS
(Διδακτορική Διατριβή)

Η διδακτορική διατριβή περιέχει αποτελέματα που αναφέρονται σε διάφορους τύπους μη αυτοσυζυγών αλγεβρών από τελεστές, όπως nest άλγεβες, ημιτριγωνικές άλγεβρες, οι οποίες προέρχονται από αυτές, και ειδικές αντιμεταθετικές άλγεβρες τελεστών. Ουσιαστικά μελετώνται τέσσερα διαφορετικά προβλήματα της περιοχής των μη αυτοσυζυγών αλγεβρών τελεστών.

Το πρώτο κεφάλαιο είναι εισαγωγικό και περιέχει γνωστές γενικές έννοιες και αποτελέσματα που χρειάζονται στη συνέχεια.

Στο δεύτερο καφάλαιο εξετάζεται η άλγεβρα των τελεστών που ορίζονται πάνω στο χώρο ℓ^2 και έχουν ένα συγκεκριμένο σύνολο διανυσμάτων, ως ιδιοδιανύσματα. Αυτή η άλγεβρα αποδεικνύεται ότι είναι ισόμορφη με τον ℓ^2 και περιγράφεται πλήρως από μια αντιμεταθετική οικογένεια τελεστών τάξης ένα. Το κεφάλαιο ολοκληρώνεται με τη μελέτη των ανακλαστικών τελεστών που περιέχονται σε άλγεβρες αυτού του τύπου.

Στην πρώτη ενότητα του τρίτου κεφαλαίου δίνονται ικανές συνθήκες για ένα μεγιστικό nest από αναλλοίωτους υποχώρους ενός ημιαδύναμου τελεστή, πάνω σ΄ ένα ομοιόμορφα κυρτό χώρο Banach, ώστε να είναι συνεχές. Στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα αυτά, προσδιορίζονται ικανές και ανγκαίες συνθήκες ώστε ο αντίστροφος ενός τελεστή T να είναι ασθενές όριο πολυωνύμων του T. Επειδή αυτό είναι ισοδύναμο με το να είναι ο τελεστής $T^{(n)} = T \oplus T \oplus T \oplus \cdots \oplus T$ (n copies) πλήρης για κάθε $n \geq 1$, δίνονται ικανές και αναγκαίες συνθήκες για τον $T^{(n)}$, ώστε να είναι πλήρης για κάθε $n \geq 1$.

Το τέταρτο κεφάλαιο αναφέρεται στους ημιτριγωνικούς τελεστές ως προς ένα nest προβολών σε ένα διαχωρίσιμο χώρο Hilbert. O Halmos το 1966 έθεσε το ερώτημα αν υπάρχει τελεστής T τέτοιος ώστε, ως προς ένα δεδομένο πλήρες nest, ούτε ο T ούτε ο συζυγής του T^* είναι ημιτριγωνικοί. Στη δεύτερη ενότητα γενικεύουμε τον ορισμό της ημιτριγωνικότητας και δίνουμε μια πλήρη απάντηση στο παραπάνω ερώτημα, τόσο για άπειρα όσο και για πεπερασμένα nest. Επίσης δείχνουμε ότι κάθε φυσιολογικός τελεστής και κάθε συμπαγής διαταραχή ενός φυσιολογικού τελεστή είναι ημιτριγωνικός ως προς κάποιο συνεχές nest και χαρακτηρίζουμε τους τελεστές που είναι ημιτριγωνικοί ως προς κάθε nest. Την ίδια περίοδο ο D. Herrero, Arizona State University γενίκευσε τα πιο πάνω αποτελέσματα αποδεικνύοντας ότι κάθε τελεστής είναι ημιτριτριγωνικός ως προς κάποιο συνεχές nest. Τέλος στην τρίτη ενότητα ορίζουμε μια καινούργια κλάση ημιτριγωνικών τελεστών ως προς ένα nest-άλγεβρα πρότυπο και αποδεικνύουμε ότι το σύνολο αυτών των ημιτριγωνικών τελεστών είναι ίσο με το σύνολο όλων των συμπαγών διαταραχών των τελεστών που ανήκουν στο πρότυπο.

Η έννοια του τριγωνικού ολοκληρώματος ενός τελεστή σε έναν χώρο Hilbert H ως προς ένα πλήρες nest, ορίστηκε για πρώτη φορά από τον Brodskii το 1965 και έχει μελετηθεί από αρκετούς ερευνητές. Στο πέμπτο κεφάλαιο ορίζουμε την έννοια του τριγωνικού ολοκληρώματος ως προς ένα πρότυπο μιας nest-άλγεβρας και μελετάμε τη σύγκλισή του ως προς την τοπολογία της νόρμας στο σύνολο $\mathcal{B}(H)$ των φραγμένων τελεστών επί του H. Μελετάται επίσης η ύπαρξη του ολκληρώματος πάνω στα συμμετρικά ιδεώδη $\mathcal{C}_p, 1 < p < \infty$ και $\mathcal{C}_\omega$ των συμπαγών τελεστών και αποδεικνύεται ότι κάθε τελεστής στο $\mathcal{C}_\omega$ διασπάται σε άθροισμα δύο τελεστών, ενός που ανήκει στο θεωρούμενο πρότυπο και ενός άλλου που ανήκει συμπληρωματικό πρότυπο.

1. Pertubation of a nest algebra module

Οι Fall, Arveson and Muhly το 1979 μελέτησαν και χαρακτήρισαν τις συμπαγείς διαταραχές μιας nest άλγεβρας, αποδεικνύοντας ότι η συμπαγής διαταραχή μιας nest άλγεβρας με αντίστοιχο nest προβολών $\mathcal{N}$, είναι η άλγεβρα των τελεστών που είναι ημιτριγωνικοί ως προς το nest $\mathcal{N}$. Οι Erdos και Power το 1980 μελέτησαν τα ασθενώς κλειστά ιδεώδη και πρότυπα nest αλγεβρών, τα οποία έχουν ιδιότητες παρόμοιες με αυτές των nest αλγεβρών. Απέδειξαν ότι σε συγκεκριμένες περιπτώσεις, όπως όταν ο ομομορφισμός που περιγράφει το πρότυπο είναι συνεχής, τότε τα αποτελεσματα των Fall, Arveson and Muhly μεταφέρονται σαυτή τη γενικότερη περίπτωση.

Η εργασία αυτή αναφέρεται στη συμπαγή διαταραχή ενός προτύπου μιας nest άλγεβρας. Nest είναι ένα διατεταγμένο σύνολο ορθών προβολών, με τη διάταξη των θετικών τελεστών και nest άλγεβρα είναι η άλγεβρα των φραγμένων τελεστών που αφήνουν αναλλοίωτες τις προβολές του nest. Στην εργασία αυτή ορίζεται μια καινούργια έννοια, η έννοια του ημιτριγωνικού τελεστή ως προς ένα πρότυπο μιας nest άλγεβρας, χωρίς να επιβάλλεται κανένας περιορισμός για τον αντίστοιχο ομομορφισμό (π.χ. συνέχεια κ.λ.π.) και αποδεικνύεται ότι η συμπαγής διαταραχή του προτύπου ταυτίζεται με το σύνολο των ημιτριγωνικών τελεστών ως προς το πρότυπο (Therem 3). Αυτό το αποτέλεσμα αποτελεί την καλύτερη δυνατή γενίκευση του αντίστοιχου αποτελέσματος για nest άλγεβρες. Μια σημαντική διαφοροποίηση, από αυτή του nest, που δημιουργεί αρκετή δυσκολία, είναι ότι για τον ορισμό του προτύπου υπεισέρχεται και η εικόνα, μέσω του ομομορφισμού, του nest που είναι αρκετά διαφορετική από το αρχικό nest. Στην εικόνα κάποιες προβολές ταυτίζονται και κάποιες άλλες παραλλείπονται. Για την παράκαμψη αυτής της δυσκολίας αποδεικνύεται ο τύπος της απόστασης τελεστή από το πρότυπο (Lemma 1), οποίος στη συνέχεια χρησιμοποιείται για την απόδειξη του βασικού θεωρήματος.

2. Full operators and Approximation of inverses

Έστω X ένας χώρος Banach. Είναι γνωστό ότι αν ο X είναι πεπερασμένης διάστασης και T είναι ένας αντιστρέψιμος τελεστής επί του X τότε υπάρχει πολυώνυμο p τέτοιο ώστε $T^{-1} = p(T)$. Επειδή το αποτέλεσμα αυτό δεν ισχύει γενικά στην άπειρη διάσταση, ακόμα και στην ασθενή τοπολογία τελεστών, είναι ενδιαφέρον να βρεθούν ικανές συνθήκες αλλά και ικανές και αναγκαίες συνθήκες, ώστε ο αντίστροφος T^{-1} να είναι ασθενές (ισοδύναμα ισχυρό) όριο πολυωνύμων του T. Τέτοιες συνθήκες έχουν δοθεί από τους Feintuch, Erdos 1974 και 1977-78-79, στην περίπτωση που ο X είναι χώρος Hilbert. Στην εργασία αυτή μελετάται το αντίστοιχο πρόβλημα στην περίπτωση που ο χώρος X είναι ομοιόμορφα κυρτός χώρος Banach, όπου όχι μόνο γενικεύονται τα αποτελέσματα των Feintuch, Erdos, αλλά και σε ορισμένες περιπτώσεις αποδεικνύονται και ισχυρότερα (όπως π.χ. Theorem 9). Το βασικό εργαλείο στην περίπτωσή μας είναι το Lemma 2, όπου αποδεικνύεται ότι ένας τελεστής είναι πλήρης full αν το μηδέν δεν ανήκει στο χωρικό (spatial) αριθμητικό πεδίο $V(T)$. Ένας τελεστής $T \in \mathcal{B}(X)$ λέγεται πλήρης (full) αν $\overline{TM} = M$

για κάθε αναλλοίωτο υπόχωρο M του T. Το χωρικό αριθμητικό πεδίο ενός τελεστή T είναι το σύνολο $V(T) = \{f(Tx) : f \in S(X^*), x \in S(X), f(x) = 1\}$, όπου $S(X) = \{x \in X : \|x\| = 1\}$ και $S(X^*) = \{f \in X^* : \|f\| = 1\}$. Δίνονται ικανές, και, αναγκαίες και ικανές συνθήκες ώστε ο αντίστροφος ενός τελεστή T να ανήκει στην ασθενώς κλειστή άλγεβρα $\mathcal{A}(T, I)$, που παράγεται από τον T και τον ταυτικό I. Μια αναγκαία συνθήκη ώστε ο $T \in \mathcal{A}(T, I)$ είναι $\operatorname{Lat} T \subseteq \operatorname{Lat} T^{-1}$ και αυτή είναι ισοδύναμη με το να είναι ο T πλήρης. Για τον λόγο αυτό δίνονται ικανές συνθήκες ώστε ο T να είναι πλήρης. Συγκεκριμένα αποδεικνύεται ότι αν το χωρικό αριθμητικό πεδίο $V(T)$ του T δεν περιέχει το μηδέν τότε ο T είναι πλήρης. Αυτό το αποτέλεσμα χρησιμοποιείται επίσης για να δειχθεί ότι κάθε αναλλοίωτο nest ενός ημιαδύναμου τελεστή είναι συνεχές. Ακολούθως, επειδή ο $T^{-1} \in \mathcal{A}(T, I)$ αν και μόνο αν, ο τελεστής $T^{(n)} = T \oplus T \oplus \cdots \oplus T$ (n copies) είναι πλήρης για κάθε $n \in \mathbb{N}$, αποδεικνύονται ικανές και αναγκαίες συνθήκες ώστε ο $T^{(n)}$ να είναι πλήρης για κάθε φυσικό αριθμό n.

3. On certain commuting families of rank one operators

Στην εργασία αυτή μελετώνται κατηγορίες μη αυτοσυζυγών αλγεβρών τελεστών. Είναι άλγεβρες τελεστών επί του χώρου ℓ^2, όπου οι τελεστές έχουν ένα δεδομένο σύνολο διανυσμάτων ως ιδιοδιανύσματα. Τέτοιες κατηγορίες αλγεβρών έχουν μελετηθεί από τους Erdos (1974) και Erdos και Longstaff (1982). Το ενδιαφέρον αυτού του τύπου αλγεβρών έγκειται στο γεγονός ότι αποτελούν πρωταρχικά παραδείγματα μη αυτοσυζυγών αλγεβρών, για τις οποίες, σε αντίθεση με τις αυτοσυζυγείς άλγεβρες, δεν υπάρχει ολοκληρωμένη θεωρία.

Συγκεκριμένα εξετάζεται η άλγεβρα $\mathcal{A}$ των τελεστών πάνω στον χώρο ℓ^2 που έχουν την ακολουθία των διανυσμάτων $x_n = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n}, 0 \cdots)$, $n \geq 1$ ως ιδιοδιανύσματα. Αποδεικνύεται ότι είναι μια μεγιστική αντιμεταθετική υπάλγεβρα της άλγεβρας $\mathcal{B}(\ell^2)$ των φραγμένων τελεστών επί του ℓ^2. Η άλγεβρα αυτή χαρακτηρίζεται πλήρως μέσω μιας αντιμεταθετικής οικογένειας τελεστών τάξης ένα. Ένα επιπλέον ενδιαφέρον χαρακτηριστικό στοιχείο της άλγεβρας $\mathcal{A}$ είναι ότι είναι τοπολογικά ισόμορφη με τον χώρο ℓ^2, ιδιότητα που δεν την έχουν άλλες γνωστές αντίστοιχες άλγεβρες. Για έναν τελεστή T της $\mathcal{A}$, προσδιορίζεται η μορφή του πίνακα που αντιστοιχεί ως προς την κανονική βάση του ℓ^2 και με βάση αυτό, δίνονται ικανές και αναγκαίες συνθήκες, ώστε ο T να είναι φραγμένος τελεστής, χαρακτηρίζονται οι τελεστές που έχουν απλές ιδιοτιμές, καθώς και οι τελεστές που είναι συμπαγείς.

Ο Nikolskii το 1969 εξέτασε το πρόβλημα: αν υπάρχει συμπαγής τελεστής που να έχει ένα πλήρες σύστημα ιδιοδιανυσμάτων και να μην επιδέχεται φασματική σύνθεση. Στην εργασία αυτή παρουσιάζεται μια καινούργια κλάση συμπαγών τελεστών οι οποίοι, ενώ έχουν ένα πλήρες σύστημα ιδιοδιανυσμάτων, τα οποία μάλιστα αντιστοιχούν σε απλές ιδιοτιμές, δεν δέχονται φασματική σύνθεση. Αυτό αποτελεί μια νέα και διαφορετική απάντηση από εκείνη του Nikolskii, στο παραπάνω πρόβλημα.

Στη συνέχεια θεωρούμε την αντίστοιχη άλγεβρα που εξετάζουν οι Erdos και Longstaff (1982) και δίνουμε ικανές συνθήκες για ένα συμπαγή τελεστή της άλγεβρας αυτής, ώστε να είναι ανακλαστικός και να δέχεται φασματική σύνθεση.

Το 1980 οι Olin και Thomson απέδειξαν ότι κάθε υποκανονικός (subnormal) τελεστής είναι ανακλαστικός. Μια άλγεβρα $\mathcal{A}$ είναι ανακλαστική αν ταυτίζεται με την άλγεβρα των τελεστών που αφήνουν αναλλοίωτο το $\operatorname{Lat} \mathcal{A}$, δηλαδή είναι $\mathcal{A} = \operatorname{Alg} \operatorname{Lat} \mathcal{A}$. Ένας τελεστής T λέγεται ανακλαστικός αν η άλγεβρα $\mathcal{A}(T, I)$ που παράγει είναι ανακλαστική. Εδώ, στην εργασία αυτή, δείχνεται ότι κανένας από τους ανακλαστικούς τελεστές σε όλες τις άλγεβρες που εξετάζονται δεν είναι υποκανονικός ή ακόμη όμοιος με έναν υποκανονικό και επομένως δεν καλύπτονται από τα αποτελέσματα των Olin και Thomson.

4. Triangular integration with respect to a nest algebra module

Η έννοια του τριγωνικού ολοκληρώματος ενός τελεστή σε ένα χώρο Hilbert ορίστηκε από τον Brodskii το 1961 και στη συνέχεια αναπτύχθηκε σημαντικά με πολλές εφαρμογές. Στην εργασία αυτή εισάγεται η έννοια του τριγωνικού ολκληρώματος ως προς ένα πρότυπο μιας nest άλγεβρας, το οποίο αποτελεί γενίκευση του αντίστοιχου τριγωνικού ολοκληρώματος ως προς μια nest άλγεβρα. Έστω $\mathcal{E}$ ένα πλήρες nest από προβολές στο χώρο Hilbert H, $\mathcal{A} = \operatorname{Alg}\mathcal{E}$ η αντίστοιχη nest άλγεβρα και $\mathcal{U}$ ένα ασθενώς κλειστό $\mathcal{A}$-πρότυπο. Έστω $E \in \mathcal{E}$ και $\widetilde{E}$ η προβολή του H επί του υποχώρου $\{\operatorname{range}(XE) : X \in \mathcal{U}\}$. Τότε η $\widetilde{E}$ είναι αναλλοίωτη από την $\mathcal{A}$ και άρα $\widetilde{E} \in \mathcal{E}$. Ορίζεται έτσι ένας αριστερά συνεχής ομομορφισμός διάταξης φ, $\varphi(E) = \widetilde{E}$ από το $\mathcal{E}$ στον εαυτό του, οποίος προσδιορίζει πλήρως το πρότυπο. Είναι $\mathcal{U} = \{X \in \mathcal{B}(H) : (I - \widetilde{E})XE = 0 \ \forall\ E \in \mathcal{E}\}$. Αν f είναι μια απεικόνιση από το $\mathcal{E}$ στον $\mathcal{B}(H)$ τότε το τριγωνικό ολοκλήρωμα της f ως προς το πρότυπο $\mathcal{U}$ ορίζεται ως το τριγωνικό ολοκλήρωμα της σύνθεσης $f \circ \varphi$ ως προς το nest $\mathcal{E}$. Ειδικότερα, αν $A \in \mathcal{B}(H)$, $f(E) = EA$, $\mathcal{P} = \{E_i : 1 \le i \le n\}$ μια διαμέριση του $\mathcal{E}$, $\Delta E_i = E_i - E_{i-1}$ και $\mathcal{F}_{\mathcal{P}} = \{F_i \in \mathcal{E} : E_{i-1} \le F_i \le E_i,\ 1 \le i \le n\}$, τότε το ολοκλήρωμα ως προς το πρότυπο ορίζεται ως:

$$\widetilde{\mathcal{T}}(A) = \lim_{\mathcal{P}} \sum_{i=1}^{n} \widetilde{F}_i A \Delta E_i.$$

Στην εργασία αυτή γίνεται πλήρης μελέτη της ύπαρξης και σύγκλισης αυτού του ολοκληρώματος, χαρακτηρίζοντας εκείνους τους τελεστές για τους οποίους το ολοκλήρωμα συγκλίνει. Αποδεικνύεται ότι το ολοκλήρωμα συγκλίνει αν και μόνο αν, ο τελεστής γράφεται ως άθροισμα δύο τελεστών που ανήκουν αντίστοιχα σε δύο «δυϊκώς» συζυγή σύνολα, τα οποία ορίζονται κατάλληλα. Με τον ορισμό τριών άλλων τριγωνικών ολοκληρωμάτων, του άνω τριγωνικού ολοκληρώματος, του κάτω τριγωνικού ολοκληρώματος και του διαγωνίου ολοκληρώματος:

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathcal{L}}(A) &= \lim_{\mathcal{P}} \sum_{i=1}^{n} \widetilde{E}_{i-1} A \Delta E_i \\
\widetilde{\mathcal{U}}(A) &= \lim_{\mathcal{P}} \sum_{i=1}^{n} \widetilde{E}_i A \Delta E_i \\
\widetilde{\mathcal{D}}(A) &= \lim_{\mathcal{P}} \sum_{i=1}^{n} \Delta \widetilde{E}_i A \Delta E_i
\end{aligned}$$

μελετάται η σύγκλιση του ολοκληρώματος και αποδεικνύονται οι διάφορες σχέσεις που συνδέουν τα ολοκληρώματα αυτά.

Εφαρμογή των παραπάνω γίνεται ειδικότερα στους συμπαγείς τελεστές. Αποδεικνύεται ότι το διαγώνιο ολοκλήρωμα για ένα συμπαγή τελεστή υπάρχει πάντα και ότι αν ο τελεστής ανήκει στο πρότυπο και το nest είναι συνεχές, τότε ο τελεστής ορίζεται πλήρως από το πραγματικό ή το φανταστικό του μέρος.

Μελετάται επίσης η σύγκλιση του ολοκληρώματος για τελεστές που ανήκουν στα συμμετρικά νορμ ιδεώδη $\mathcal{C}_p$, $1 \leq p \leq \infty$ και $\mathcal{C}_\omega$ των συμπαγών τελεστών. Αποδεικνύεται ότι τα δίκτυα των μερικών αθροισμάτων των άνω, κάτω και διαγώνιων ολοκληρωμάτων συγκλίνουν πάντα στα ιδεώδη $\mathcal{C}_p$. Ειδικότερα, αν το nest είναι συνεχές, τότε κάθε τελεστής στο $\mathcal{C}_\omega$ διασπάται σε άθροισμα δύο τελεστών που ανήκουν στο πρότυπο και στο συζυγές πρότυπο αντίστοιχα. Επιπλέον η συνθήκη $X \in \mathcal{C}_\omega$ είναι ικανή και αναγκαία για να συγκλίνει το ολοκλήρωμα ως προς κάθε πρότυπο κάθε συνεχούς nest. Τα αποτελέσματα αυτά είναι γενικεύσεις αντίστοιχων αποτελεσμάτων που απέδειξε ο Machaev για nest άλγεβρες. Για την απόδειξη των αποτελεσμάτων αυτών αναπτύσσονται κατάλληλες τεχνικές, για να υπερνικηθούν οι δυσκολίες που προκύπτουν τόσο από τον ομομορφισμό που περιγράφει το πρότυπο, όσο και από την έλλειψη συμμετρικότητας, (ως προς το συζυγές), των συνόλων που ορίζονται για το πρότυπο και παίζουν τον αντίστοιχο ρόλο, που παίζει το radical για τις άλγεβρες.

5. Nest space decomposition for an operator in $\mathcal{C}_\omega$

Στην εργασία αυτή γενικεύονται αποτελέσματα της εργασίας [Δ4] που αφορούν τελεστές στο συμμετρικό ιδεώδες $\mathcal{C}_\omega$. Οι τεχνικές που χρησιμοποιούνται εδώ είναι εντελώς διαφορετικές από αυτές που χρησιμοποιούνται στην εργασία [Δ4]. Το ιδεώδες $\mathcal{C}_\omega$, όπως και το συζυγές του $\mathcal{C}_\Omega$, είναι υποσύνολα του συνόλου των συμπαγών τελεστών και ορίζονται ως:

$$\mathcal{C}_\omega = \{A \in \mathcal{K}(H) : \Sigma_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} s_i(A) < \infty\}$$
$$\mathcal{C}_\Omega = \{A \in \mathcal{K}(H) : \sup_n \frac{\Sigma_{i=1}^{n} s_i(A)}{\Sigma_{i=1}^{n} \frac{1}{i}} < \infty\}$$

όπου $s_i(A)$ είναι οι χαρακτηριστικοί αριθμοί του A, δηλαδή η ακολουθία των ιδιοτιμών του συμπαγούς τελεστή $(A^*A)^{1/2}$ κατά φθίνουσα σειρά, με επανάληψη της κάθε μιας ιδιοτιμής, σύμφωνα με την πολλαπλότητά της.

Έστω H_1, H_2 δύο χώροι Hilbert, $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ τα σύνολα των κλειστών υποχώρων των H_1 και H_2 αντίστοιχα και $\mathcal{M}(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2)$ το σύνολο όλων των joint-συνεχών απεικονίσεων από το $\mathcal{P}_1$ στο $\mathcal{P}_2$, οι οποίες διατηρούν το μηδέν. Κάθε $\phi \in \mathcal{M}(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2)$ ορίζει ένα σύνολο τελεστών, που συμβολίζεται με Opϕ, και είναι το:

$$\mathrm{Op}\phi = \{A \in \mathcal{B}(H_1, H_2) : \ AP_1 \subseteq \phi(P_1) \ \forall \ P_1 \in \mathcal{P}_1\}.$$

Όταν ένα από τα $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ είναι ολικά διατεταγμένο τότε το αντίστοιχο σύνολο Opϕ λέγεται **nest χώρος**. Χρησιμοποιώντας το τριγωνικό ολοκλήρωμα ως προς ένα πρότυπο μιας nest άλγεβρας, την απεικόνιση ϕ και τον αντίστοιχο nest χώρο Opϕ, αποδεικνύεται ότι κάθε τελεστής στο ιδεώδες $\mathcal{C}_\omega$ γράφεται ως άθροισμα δύο τελεστών, όπου ο ένας προσθετέος ανήκει στον nest χώρο Opϕ και ο άλλος ανήκει στον nest χώρο Opσ, όπου σ είναι η συζυγής απεικόνιση της συν-απεικόνισης (co-map) της ϕ.

6. The module factorization of operators on Hilbert space

Είναι γνωστό ότι η επίλυση εξισώσεων με τελεστές είναι στενά συνδεδεμένη με το πρόβλημα παραγοντοποίησης των τελεστών αυτών ως προς ένα nest $\mathcal{E}$ ορθογώνιων προβολών σ′ ένα χώρο Hilbert H.

Όταν ένας τελεστής $A \in \mathcal{B}(H)$ έχει τη μορφή $A = ST$, λέμε ότι η μορφή αυτή είναι μια παραγοντοποίηση του τελεστή A ως προς ένα nest $\mathcal{E}$, αν ο τελεστής S αφήνει αναλλοίωτες τις προβολές του $\mathcal{E}$ και ο T τα ορθογώνια συμπληρώματα των προβολών αυτών, δηλαδή τις προβολές του nest $\mathcal{E}^{\perp}$. Παραγοντοποιήσεις τέτοιου τύπου μελετήθηκαν πρωταρχικά από τους Gohberg και Krein το 1970.

Στην εργασία αυτή εισάγουμε τη νέα έννοια της παραγοντοποίησης ενός τελεστή ως προς ένα πρότυπο $\mathcal{U}$ της nest άλγεβρας $\operatorname{Alg}\mathcal{E}$, ορίζουμε την έννοια της κανονικότητας μιας παραγοντοποίησης ως προς το θεωρούμενο πρότυπο $\mathcal{U}$ και ταξινομούμε τα διάφορα είδη των παραγοντοποιήσεων που προκύπτουν. Δείχνουμε ότι δεν μπορούμε να έχουμε την κατά φυσικό τρόπο γενίκευση των κανονικών παραγοντοποιήσεων ως προς ένα nest, ως προς το ζεύγος των προτύπων $\mathcal{U}$,$\mathcal{U}^{\perp}$, δικαιολογώντας έτσι γιατί είναι απαραίτητο να ορίσουμε κανονικές παραγοντοποιήσεις ως προς το ζεύγος προτύπων $\mathcal{U}, (\mathcal{U}^{\perp})^*$.

Συγκεκριμένα ορίζουμε παραγοντοποιήσεις της μορφής $A = ST$, όπου $S \in \mathcal{U}$, $S^{-1} \in (\mathcal{U}^{\perp})^*$, $T \in \mathcal{U}^{\perp}$ και $T^{-1} \in \mathcal{U}^*$. Επιπλέον δίνουμε ικανές και αναγκαίες συνθήκες ώστε ένας θετικός αντιστρέψιμος τελεστής A να παραγοντοποιείται στη μορφή $A = S^*S$, όπου $S \in \mathcal{U}$ και $S^{-1} \in (\mathcal{U}^{\perp})^*$. Το αποτέλεσμα αυτό αποτελεί γενίκευση του κύριου αποτελέσματος μιας εργασίας του Feintuch (1982).

7. Full operators on reflexive Banach spaces

Στην πρώτη ενότητα της εργασίας αυτής γενικεύονται όλα τα αποτελέσματα της εργασίας [Δ2] από ομοιόμορφα κυρτούς χώρους Banach, σε ανακλαστικούς χώρους Banach. Είναι γνωσό ότι κάθε ομοιόμορφα κυρτός χώρος Banach είναι ανακλαστικός, αλλά όχι αντίστροφα. Επιπλέον δείχνουμε, μέσω ενός παραδείγματος, ότι οι συνθήκες «$0 \notin V(T)$ »(1) και «T είναι πλήρης»(2) δεν είναι ισοδύναμες (ισχύει (1)$\Rightarrow$ (2), αλλά όχι αντίστροφα). Στη δεύτερη ενότητα αποδεικνύουμε μια ισοδύναμη συνθήκη για έναν τελεστή T σε ένα ανακλαστικό χώρο Banach, με τη συνθήκη « T είναι πλήρης», η οποία συνθήκη σχετίζεται με το $\operatorname{Lat}(0 \oplus T)$. Στη συνέχεια χρησιμοποιούμε τη συνθήκη αυτή για να απαντήσουμε σε ένα ανοικτό ερώτημα του Bravo (1980). Συγκεκριμένα αποδεικνύουμε ότι αν X είναι ένας ανακλαστικός χώρος Banach και $T \in \mathcal{B}(H)$ είναι ένας τελεστής για τον οποίο ισχύει $0 \notin \operatorname{co}V(T)$ (κυρτή θήκη του χωρικού αριθμητικού πεδίου του T) τότε η ασθενώς κλειστή άλγεβρα $\mathcal{A}_{(0 \oplus T)}$, η οποία παράγεται από τον $0 \oplus T$ και τον ταυτικό τελεστή, διαχωρίζεται. Ισχύει δηλαδή $\mathcal{A}_{(0 \oplus T)} = \mathcal{A}_0 \oplus \mathcal{A}_T$.

8. Partial isometries and extreme points of certain operator algebras

Έστω H ένας διαχωρίσιμος χώρος Hilbert, $\mathcal{L}$ ένας πλήρως επιμεριστικός σύνδεσμος προβολών και $\mathcal{A} = \operatorname{Alg}\mathcal{L}$ η άλγεβρα των φραγμένων τελεστών που αφήνουν αναλλοίωτο κάθε στοιχείο του $\mathcal{L}$.

Οι Moore και Trent (1987) απέδειξαν ικανές και αναγκαίες συνθήκες ώστε ένας τελεστής T της άλγεβρας $\mathcal{A}$ να είναι ακραίο σημείο της μοναδιαίας μπάλας $\mathcal{A}_1$ της $\mathcal{A}$. Οι συνθήκες αυτές αναφέρονται σε όλες τις προβολές του $\mathcal{L}$ και αυτό αποτελεί σημαντική δυσκολία για τη μελέτη των ακραίων σημείων της $\mathcal{A}_1$. Για τον λόγο αυτό μελετάμε το πρόβλημα προσδιορισμού κατηγοριών τελεστών της άλγεβρας $\mathcal{A}$, οι οποίες αποτελούνται από ακραία σημεία. Για παράδειγμα οι ισομετρίες και οι συνισομετρίας στην $\mathcal{A}_1$ είναι ακραία σημεία της. Μάλιστα δείχνουμε κάτι ισχυρότερο, ότι είναι ισχυρά ακραία σημεία. Σε ένα χώρο Banach X, ένα μοναδιαίο διάνυσμα x λέγεται ισχυρό ακραίο σημείο της μοναδιαίας μπάλας X_1 αν και μό αν, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $y \in X$ με $\max\{\|x+y\|, \|x-y\|\} \leq 1 + \delta$, να συνεπάγεται $\|y\| \leq \varepsilon$.

Να σημειωθεί ότι κάθε ισχυρό ακραίο σημείο είναι και ακραίο σημείο. Το αντίστροφο δεν ισχύει γενικά. Εμείς αποδεικνύουμε ότι σε μια νορμ κλειστή άλγεβρα τελεστών η οποία περιέχει τους συμπαγείς τελεστές ισχύει και το αντίστροφο.

Στη δεύτερη ενότητα μελετάμε ένα συγκεκριμένο παράδειγμα μιας τέτοιας άλγεβρας από όπου προκύπτει ότι υπάρχουν μερικές ισομετρίες (partial isometries) που δεν είναι ακραία σημεία και υπάρχουν ακραία σημεία που δεν είναι μερικές ισομετρίες. Στη συνέχεια δίνουμε ικανές συνθήκες οι οποίες αναφέρονται στον αρχικό και τελικό χώρο της μερικής ισομετρίας, ώστε αυτή να είναι ακραίο σημείο. Επιπλέον δείχνουμε ότι μια μερική ισομετρία είναι ένα ακραίο σημείο της μοναδιαίας μπάλας $\mathcal{A}_1$ αν και μόνο αν, είναι μεγιστική στην άλγεβρα $\mathcal{A}$. Τέλος αποδεικνύουμε ένα ανεξάρτητο και γενικότερου ενδιαφέροντος αποτέλεσμα, δίνοντας ικανές συνθήκες ώστε μια μερική ισομετρία να ανήκει σε μια ανακλαστική άλγεβρα τελεστών.

9. Factorization with respect to a commutative subspace lattice

Στην εργασία [Δ6] μελετήσαμε το πρόβλημα της παραγοντοποίησης ενός τελεστή ως προς ένα πρότυπο μιας nest άλγεβρας, γενικεύοντας τις αντίστοιχες παραγοντοποιήσεις τελεστών ως προς τα nest. Το βασικό εργαλείο σε αυτές τις δυο πριπτώσεις ήταν τα αντίστοιχα τριγωνικά ολοκληρώματα. Όταν το 1989 ο Κατσούλης όρισε και μελέτησε στη διατριβή του τα τριγωνικά ολοκληρώματα ως προς ένα αντιμεταθετικό σύνδεσμο προβολών, το πρόβλημα ορισμού νέων παραγοντοποιήσεων ενός τελεστή ως προς ένα αντιμεταθετικό σύνδεσμο προβολών, προέκυψε κατά φυσικό τρόπο. Ήταν λογικό να επιχειρηθεί η επέκταση των μέχρι τότε γνωστών παραγοντοποιήσεων, εφαρμόζοντας το νέο αυτό τριγωνικό ολοκλήρωμα.

Στην εργασία αυτή λοιπόν ορίζουμε παραγοντοποιήσεις ενός αντιστρέψιμου τελεστή A ως προς ένα αντιμεταθετικό σύνδεσμο προβολών (c.s.l.) $\mathcal{L}$. Μελετάμε παραγοντοποιήσεις της μορφής $A = ST$, οπου $S \in \operatorname{Alg}\mathcal{L}$ και $T \in \operatorname{Alg}\mathcal{L}^{\perp}$. Οι ορισμοί αυτοί, παρότι «φορμαλιστικά» είναι παράλληλοι με τους αντίστοιχους ορισμούς για nest, διαφέρουν σημαντικά, διότι σε ένα αντιμεταθετικό σύνδεσμο δεν υπάρχει η ισχυρή ιδιότητα της ολικής διάταξης του nest. Επιπλέον εισάγουμε και μελετάμε ειδικής μορφής παραγοντοποιήσεις ως προς τους παράγοντες που υπεισέρχονται. Τέτοιες περιπτώσεις είναι π.χ. $A = (I + B)D(I + C)$ ή $A = (I + B)D$, όπου οι τελεστές B, D, C ανήκουν σε συγκεκριμένα σύνολα. Επίσης ορίζουμε και μελετάμε κανονικές παραγοντοποιήσεις τελεστών ως προς ένα (c.s.l.) χρησιμοποιώντας τη νέα έννοια του τριγωνικού ολοκληρώματος. Τέλος δίνουμε ικανές και αναγκαίες συνθήκες για ένα θετικό αντιστρέψιμο τελεστή A ώστε να παραγοντοποιείται στη μορφή $A = BC$, όπου $B, B^{-1} \in \operatorname{Alg}\mathcal{L}$ και $C, C^{-1} \in \operatorname{Alg}\mathcal{L}^{\perp}$.

10. On the minimal polynomial of an algebraic operator

Ένας τελεστής $A \in \mathcal{B}(X)$ λέγεται αλγεβρικός αν υπάρχει πολυώνυμο P $(\neq 0)$ τέτοιο ώστε $p(A) = 0$. Στην πεπερασμένη διάσταση, ως συνέπεια του θεωρήματος Cayley-Hamilton, όλοι οι τελεστές είναι αλγεβρικοί. Αν $\dim X = n$ τότε ο βαθμός του p είναι μικρότερος ή ίσος του n. Στην άπειρη διάσταση οι πλειοψηφία των τελεστών δεν είναι αλγεβρικοί. Όμως οι αλγεβρικοί τελεστές έχουν την ιδιότητα: όλοι οι αναλλοίωτοι υπόχωροί τους είναι πεπερασμένης διάστασης. Χρησιμοποιώντας αυτή την ιδιότητα χαρακτηρίζουμε τον βαθμό $\deg(A)$ (ο βαθμός του A ορίζεται ως βαθμός του ελαχίστου πολυωνύμου του), αποδεικνύοντας ότι: για ένα αλγεβρικό τελεστή A, ο βαθμός του είναι n, αν και μόνο αν, για ένα συγκεκριμένο διάνυσμα $x \in X$ τα διανύσματα $\{x, Ax, A^2x, ..., A^{n-1}x\}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, ενώ τα διανύσματα

$\{x, Ax, A^2x, ..., A^nx\}$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα. Ειδικότερα στην περίπτωση που ο χώρος X είναι Hilbert και $n = \deg(A)$, χαρακτηρίζουμε τις n πρώτες συντεταγμένες κάθε διανύσματος $x \in X$, ως προ μια κατάλληλη βάση. Αποδεικνύουμε ότι υπάρχουν $n \times 1$ πίνακες P, Q (ο Q εξαρτάται από το x) και $n \times n$ πίνακας B, τέτοιοι ώστε $x_k = Q^\top B^{k-1}P,\ k = 1, 2, ..., n$. Στη συνέχεια ορίζουμε την ιδιότητα (d_n) για ένα αναλλοίωτο υπόχωρο M του αλγεβρικού τελεστή A και αποδεικνύουμε ότι

$$\deg(A) = \max\{n : n = \dim\, M,\ M \text{ έχει την ιδιότητα } (d_n)\}$$

Τέλος εφαρμόζουμε τα παραπάνω, παίρνοντας μερικές εφαρμογές στη θεωρία συστημάτων, που αφορούν ελεγχόμενα συστήματα ελέγχου.

11. On the nest algebra- module factorizations

Η εργασία αυτή είναι συνέχεια και συμπληρωματική της εργασίας [Δ6]. Ορίζονται ειδικής μορφής παραγοντοποιήσεις τελεστών, όπως $A = (I + R)S$, ως προς ένα πρότυπο $\mathcal{U}$ μιας nest άλγεβρας και αποδεικνύονται νέα αποτελέσματα στην περίπτωση που το πρότυπο περιγράφεται από ένα ομομορφισμό που είναι φθίνων. Οι αριστερά κανονικές και οι κανονικές παραγοντοποιήσεις που ορίζονται εδώ (χρησιμοποιώντας το σύνολο $\mathcal{R}(\mathcal{E}, \sim)$, το οποίο αποτελείται από ημιαδύναμους τελεστές) είναι διαφορετικές από τις παραγοντοποιήσεις στην εργασία [Δ6]. Αυτό συμβαίνει διότι ο τελεστής $I + R \notin \mathcal{U}$, αφού $I \notin \mathcal{U}$. Οι παραγοντοποιήσεις αυτές δεν μελετήθηκαν στην εργασία [Δ6], διότι δεν ήταν γνωστό ότι το σύνολο $\mathcal{R}(\mathcal{E}, \sim)$, στην περίπτωση που ομομορφισμός είναι φθίνων, αποτελείται από ημιαδύναμους τελεστές. Ο χαρακτηρισμός αυτός έγινε το 1999 από τον Todorov και χρησιμοποιήθηκε στην παρούσα εργασία.

12. Approximability of the generalized inverse of an operator

Έστω H ένας χώρος Hilbert και $T \in \mathcal{B}(H)$ ένας φραγμένος τελεστής με κλειστό σύνολο τιμών. Αν ο H είναι πεπερασμένης διάστασης και ο T αντιστρέψιμος, τότε υπάρχει πολυώνυμο p ώστε $T^{-1} = p(T)$. Στην άπειρη διάσταση αυτό δεν ισχύει γενικά ακόμα και στην ασθενή τοπολογία τελεστών. Για τον γενικευμένο αντίστροφο ενός μη αντιστρέψιμου τελεστή T, στην πεπερασμένη διάσταση ο Perl έδειξε ότι ο γενικευμένος αντίστροφος $T^\dagger$ είναι πολυώνυμο του T αν και μόνο αν, αντιμετατίθεται με τον T.

Στην εργασία αυτή για ένα μη αντιστρέψιμο τελεστή T με κλειστό σύνολο τιμών, δίνουμε ικανές και αναγκαίες συνθήκες ώστε ο γενικευμένος αντίστροφος $T^\dagger$ να είναι πολυώνυμο του T. Συγκεκριμένα δείχνουμε ότι ο $T^\dagger$ είναι πολυώνυμο του T αν και μόνο αν, $TT^\dagger = T^\dagger T$ και ο T είναι αλγεβρικός τελεστής. Δίνουμε επίσης ικανές συνθήκες ώστε ο γενικευμένος αντίστροφος να είναι ασθενές όριο πολυωνύμων του T, ισοδύναμα να ανήκει στην ασθενώς κλειστή άλγεβρα $\mathcal{A}(T, I)$, που παράγει ο T με τον ταυτοτικό I. Αποδεικνύουμε ακόμη, ότι αν ο T είναι φυσιολογικός με κλειστό σύνολο τιμών, τότε ο $T^\dagger$ ανήκει στην ασθενώς κλειστή άστρο άλγεβρα, που παράγεται από τον T και T^*. Τέλος αποδεικνύουμε ότι ο γενικευμένος αντίστροφος ενός τελεστή T με κλειστό σύνολο τιμών, ανήκει πάντα στην Von Newmann άλγεβρα που παράγει ο T.

13. Generalized inverses and special type operator Algebras

Η εργασία αυτή αναφέρεται στον γενικευμένο αντίστροφο $T^\dagger$ ενός μη αντιστρέψιμου τελεστή T με κλειστό σύνολο τιμών, πάνω σε ένα χώρο Hilbert H. Ο γενικευμένος αντίστροφος είναι φραγμένος τελεστής αν και μόνο αν, ο T έχει κλειστό σύνολο τιμών. Στην εργασία αυτή: 1. Θεωρούμε ένα τελεστή πεπερασμένης τάξης και δίνουμε αναλυτικό τύπο για τον υπολογισμό του γενικευμένου αντιστρόφου του. 2. Δίνουμε ικανές και αναγκαίες συνθήκες ώστε ο γενικευμένος αντίστροφος του γινομένου δυο τάξης ένα τελεστών να ισούται με το γινόμενο των γενικευμένων αντιστρόφων κατά αντίστροφη σειρά. Να σημειωθεί ότι ο τύπος του αντίστροφου του γινομένου δύο αντιστρέψιμων τελεστών (reverse order law) δεν ισχύει γενικά για τους γενικευμένους αντίστροφους. 3. Μελετάμε τον γενικευμένο αντίστροφο του γινομένου δυο τελεστών, όπου ο ένας από τους παράγοντας είναι τελεστής ειδικής μορφής και δίνουμε ικανές και αναγκαίες συνθήκες ώστε να ισχύει ο (reverse order law). 4. Εξετάζουμε πότε ο γενικευμένος αντίστροφος ενός τάξης ένα τελεστή μιας nest άλγεβρας, ανήκει επίσης στη nest άλγεβρα και συμπεραίνουμε ότι: αν το nest είναι συνεχές, τότε ο γενικευμένος αντίστροφος ενός τάξης ένα τελεστή δεν ανήκει ποτέ στην άλγεβρα αυτή. 5. Δίνουμε ικανές συνθήκες για ένα τελεστή μιας nest άλγεβρας με συνεχές nest, ώστε ο γενικευμένος αντίστροφός του να ανήκει στη nest άλγεβρα. 6. Δίνουμε ισοδύναμες συνθήκες, οι οποίες περιέχουν γενικευμένους αντιστρόφους τελεστών, ώστε ένας τελεστής να παραγοντοποιείται μέσω μιας υπάλγεβρας μιας Von Newmann άλγεβρας. Το τελευταίο αποτελεί μια παραλλαγή του γνωστού στη Θεωρία Τελεστών προβλήματος: Αν $\mathcal{F}$ είναι μια C^*-άλγεβρα με μονάδα, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{F}$ είναι μια υπάλγεβρα με μονάδα και $T \in \mathcal{F}$ είναι ένας αντιστρέψιμος τελεστής, πότε μπορεί να ισχύει $T^*T = A^*A$, όπου $A, A^{-1} \in \mathcal{A}$;

14. Factorizations of EP operators

Έστω H, K δύο χώροι Hilbert και $\mathcal{B}(H, K)$ το σύνολο των φραγμένων τελεστών από τον H στον K. Ο Moore-Penrose αντίστροφος ενός τελεστή $T \in \mathcal{B}(H, K)$ με κλειστό σύνολο τιμών, είναι ο μοναδικός τελεστής $T^\dagger \in \mathcal{B}(K, H)$ που ικανοποιεί τις παρακάτω τέσσερις συνθήκες

$$TT^\dagger T = T, \qquad T^\dagger TT^\dagger = T^\dagger, \qquad (TT^\dagger)^* = TT^\dagger, \qquad (T^\dagger T)^* = T^\dagger T.$$

Ένας τελεστής $T \in \mathcal{B}(H)$ λέγεται EP αν $\mathcal{N}(T) = \mathcal{N}(T^*)$, ισοδύναμα αν $TT^\dagger = T^\dagger T$. Ο Perl έδειξε ότι ένας πίνακας T είναι EP αν και μόνο αν, μπορεί να γραφεί στη μορφή $U(A \oplus 0)U^*$, όπου U είναι ορθομοναδιαίος ή ισομορφισμός και ο A επίσης ισομορφισμός. Παρότι κάθε EP τελεστής γράφεται σε μια τέτοια μορφή, αυτή η μορφή ενώ χρησιμοποιήθηκε στη μελέτη των EP τελεστών, δεν έχει όμως χρησιμοποιηθεί μέχρι τώρα στον χαρακτηρισμό αυτών των τελεστών.

Στην εργασία αυτή χαρακτηρίζουμε τους EP τελεστές χρησιμοποιώντας διάφορες μορφές παραγοντοποιήσεων. Στην ενότητα τρία χαρακτηρίζουμε EP τελεστές μέσω της παραγοντοποίησης $U(A \oplus 0)U^*$ αλλά και μέσω παραγοντοποίησης ίδιας μορφής, συγχρόνως των T και T^* ή των T και $T^\dagger$ ή των T^*T και T^*T. Για τη μελέτη EP πινάκων χρησιμοποιήθηκαν επίσης παραγοντοποιήσεις της μορφής $T^* = VT$ και $T = BC$. Ο Perl έδειξε ότι ο πίνακας T είναι EP, αν και μόν αν, υπάρχει ισομορφισμός V τέτοιος ώστε $T^* = VT$. Στην τέταρτη ενότητα δείχνουμε ότι στην πραγματικότητα δεν χρειάζεται ο V να είναι ισομορφισμός, αλλά αρκεί να είναι ένας «1-1» τελεστής και δώσαμε πολλούς νέους χαρακτηρισμούς EP τελεστών, αυτής της μορφής. Αποδεικνύουμε επίσης με κατάλληλα παρδείγματα ότι οι συνθήκες που αναφέρουμε είναι οι καλύτερες δυνατές και ότι αυτές εξασφαλίζουν τους γενικότερους δυνατούς χαρακτηρισμούς. Στην τελευταία ενότητα μελατάμε παραγοντοποιήσεις της μορφής $T = BC$, όπου B είναι «1-1» με κλειστό σύνολο τιμών και ο C είναι «επί». Δίνουμε τέσσερα θεωρήματα τα οποία χαρακτηρίζουν EP τελεστές μέσω τέτοιων παραγοντοποιήσεων.

Τέλος αναφέρουμε ότι τα περισσότερα από τα αποτελέσματα στις τρείς τελευταίες ενότητες δίνουν νέους χαρακτηρισμούς και για EP πίνακες.

15. A definition of numerical range of rectangular matrices

Το αριθμητικό πεδίο ενός $n \times n$ μιγαδικού πίνακα A ορίζεται ως το συμπαγές και κυρτό σύνολο $F(A) = \{x^*Ax \in \mathbb{C} : x \in \mathbb{C}^n,\, x^*x = 1\}$ και αποτελεί αντικείμενο έρευνας για τουλάχιστον εννέα δεκαετίες. Είναι χαρακτηριστικό πως η κυρτότητα του αποδείχθηκε από τον F. Hausdorff το 1919. Το σταθερό ενδιαφέρον των ερευνητών για το συγκεκριμένο σύνολο οφείλεται τόσο στις ιδιαίτερες γεωμετρικές του ιδιότητες και τη στενή τους σχέση με τις ιδιότητες του πίνακα, όσο και στις πολυάριθμες εφαρμογές του ιδίου και των γενικεύσεων του. Έχει μάλιστα οδηγήσει στη δημοσίευση περισσότερων των εξακοσίων ερευνητικών εργασιών.

Στην εργασία αυτή, προτείνεται ένας ορισμός αριθμητικού πεδίου για μη τετραγωνικούς πίνακες, με κίνητρο τη γνωστή σχέση

$$F(A) = \{\mu \in \mathbb{C} : \|A - \lambda I_n\|_2 \geq |\mu - \lambda|,\, \forall\, \lambda \in \mathbb{C}\}.$$

Συγκεκριμένα, για δύο $n \times m$ πίνακες A, B και μια νόρμα πινάκων $\|\cdot\|$, ορίζουμε το αριθμητικό πεδίο του A ως προς τον B να είναι το συμπαγές και κυρτό σύνολο

$$W_{\|\cdot\|}(A;B) = \{\mu \in \mathbb{C} : \|A - \lambda B\| \geq |\mu - \lambda|,\, \forall\, \lambda \in \mathbb{C}\}.$$

Αποδεικνύουμε βασικές ιδιότητες του $W_{\|\cdot\|}(A;B)$, επεκτείνοντας ιδιότητες του κλασικού αριθμητικού πεδίου, και σχολιάζουμε τον προτεινόμενο ορισμό. Αποδεικνύουμε επίσης ότι στην περίπτωση που η νόρμα $\|\cdot\|$ προέρχεται από εσωτερικό γινόμενο πινάκων (όπως η νόρμα Frobenius), το πεδίο $W_{\|\cdot\|}(A;B)$ είναι πάντα κυκλικός δίσκος. Επιπλέον, δικαιολογούμε την επιλογή του B αντί του πίνακα

$$I_{n,m} = \begin{cases} I_n, & n = m \\ [\, I_n \;\; 0\,], & n < m \\ \begin{bmatrix} I_m \\ 0 \end{bmatrix}, & n > m \end{cases},$$

που αποτελεί φυσική γενίκευση του μοναδιαίου πίνακα I_n, και μελετάμε τη σχέση του $W_{\|\cdot\|}(A;B)$ με τις ιδιοτιμές των μη τετραγωνικών πινάκων.